Speltheorie

Wiskundetoernooi 2024
Voorbereidend materiaal

20 september 2024

Met dank aan onze sponsoren:

platform wiskunde nederland

KWG

Inhoudsopgave

Inleiding

Beste deelnemers aan het wiskundetoernooi 2024,

Over een paar weken is het zo ver, en mogen jullie deelnemen aan het wiskundetoernooi. De eerste ronde op dit toernooi heet "Sum of Us". Deze ronde gaat elk jaar over een ander wiskundig thema. Hierop kun je je voorbereiden met het oefenmateriaal in dit document. Je docent is vast bereid om je hierbij te helpen!

Dit jaar staat het thema **speltheorie** centraal. Misschien denk je bij speltheorie meteen aan Monopoly, Risk of Catan en speltheorie kan zeker gebruikt worden om dat soort spelletjes te bestuderen, maar het biedt veel meer dan alleen dat. Elke situatie waarin meerdere spelers een keuze moeten maken die invloed heeft op de andere spelers kan met speltheorie bestudeerd worden. Spelers kunnen hier mensen zijn, maar ook dieren, bedrijven, landen of heel veel andere dingen.

Eén van de toepassingen van speltheorie die we tegen zullen komen is het nemen van penalty's waar een keeper een kant moet kiezen om te verdedigen en een veldspeler een kant moet kiezen om naartoe te schieten. Een andere toepassing van speltheorie is de evolutietheorie waarin het gebruikt kan worden om te bestuderen hoe bepaalde eigenschappen van dieren wel of niet lonen voor hun soort. Dit zijn slechts twee voorbeelden van situaties waarin speltheorie gebruikt kan worden.

Ondertussen hebben al 15 speltheorie onderzoekers de Nobelprijs voor Economie gewonnen. Binnen de wiskunde is het vrij bekend, maar veel mensen buiten de wiskunde weten er niet veel van af. Daarom laten we jullie graag kennis maken met dit vakgebied!

Een wiskundig begrip dat je voor het eerst ziet is vaak lastig direct te doorgronden. In voorbeelden zie je meestal veel beter wat je je bij zo'n begrip kunt voorstellen. Daarom geven we in dit document veel voorbeelden van allerlei begrippen. Ons advies is om hierop de focussen: als je de voorbeelden van een begrip snapt, dan heb je waarschijnlijk begrepen hoe je met dat begrip kunt werken. Wat nog belangrijker is, is om vervolgens oefenopgaven te maken. Deze staan door het hele document, en achterin het document bevinden zich oplossingen.

Tijdens de Sum of Us mag het hele document gebruikt worden samen met een (niet-grafische) rekenmachine. Hoewel dit document tijdens de dag gebruikt mag worden, **wordt er te veel behandeld om dit**

op de dag zelf nog helemaal door te nemen. Daarom raden we sterk aan om dit document voor het toernooi door te nemen.

Het document is gemaakt door Jimme Bergfeld en Gwen Bleckmann, studenten wiskunde aan de Radboud Universiteit, onder begeleiding van Peter Hochs en Sep Thijssen.

We wensen jullie veel plezier!

De organisatoren,

Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)
Michael Gruber, Thorsten Holm & Florian Leydecker (Leibniz Universität Hannover)
Niels Bonneux & Joeri Van der Veken (KU Leuven)
Peter Hochs & Sep Thijssen (Radboud Universiteit Nijmegen)

Hoofdstuk 1

Spellen

We beginnen met de basis van speltheorie: wat is een spel, en hoe kunnen we dit wiskundig beschrijven? Bij die beschrijving gebruiken we meestal een **matrix**: een tabel waarin de mogelijke uitkomsten van een spel op een handige manier bij elkaar staan. We kijken ook naar **strategieën**: manieren waarop spelers kunnen kiezen welke acties ze tijdens een spel uitvoeren.

1.1 Wat is een spel?

Een spel is een interactie tussen spelers, waarbij alle spelers een aantal mogelijke acties hebben. Het aantal spelers kan anders zijn bij ieder spel dat je speelt. In dit document zullen we ons vooral richten op spellen met twee spelers. In veel gevallen is het bekijken van spellen van twee spelers makkelijker dan voor drie of meer spelers. Er hoeft immers maar met één mogelijke tegenstander rekening gehouden te worden.

Binnen een spel maken alle spelers een keuze en deze keuze noemen we een actie. De spelers weten niet van elkaar wat ze kiezen en ze kiezen tegelijkertijd hun actie. Als beide spelers hun actie gekozen hebben, dan leidt dit tot een uitkomst voor beide spelers, die we vaak als winst of verlies kunnen omschrijven. Om er wiskundig over te kunnen praten, geven we de uitkomst van een spel voor beide spelers aan met getallen. We kunnen een speler bijvoorbeeld 1 punt geven bij winst, en -1 bij verlies. Of als een spel om geld wordt gespeeld, dan kan de uitkomst een geldbedrag zijn dat een speler wint of verliest.

Voorbeeld 1.1. Filip en Tijn spelen het spel[a] "Steen, papier, schaar". In dit spel kiezen ze tegelijk of ze steen, papier of schaar spelen. Steen wint van schaar, papier wint van steen en schaar wint van papier. Als beide spelers hetzelfde spelen is het gelijkspel.

[a] Dit spel wordt soms ook "Blad, steen, schaar" genoemd.

Het aantal spelers is nu twee. De acties die de spelers kunnen uitvoeren zijn om papier, steen of schaar te spelen. Als ze beide deze keuze hebben gemaakt, dan ligt de uitkomst van het spel al vast. Na het spelen weten ze wie gewonnen heeft, of dat het een gelijkspel is.

Om hiermee te kunnen rekenen geven we winnen een waarde van 1, verliezen een waarde van -1 en gelijk spelen een waarde van 0. Dus als Filip kiest voor de actie "steen", en Tijn kiest voor de actie "papier", dan is de uitkomst van het spel -1 voor Filip, en 1 voor Tijn.

1.2 Matrices

Om spellen te bestuderen hebben we een manier nodig om spellen wiskundig te beschrijven. Dit doen we in de speltheorie meestal door middel van een matrix.

> Een **matrix** is een tabel met ronde haken eromheen waar getallen in staan.

Voorbeeld 1.2. Een matrix kan er bijvoorbeeld zo uitzien: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

> Getallen die boven elkaar staan vormen samen een **kolom** en getallen die naast elkaar staan een **rij**.

Een ezelsbruggetje voor wie de woorden "rij" en "kolom" door elkaar haalt: als je mensen vraagt in een rij te gaan staan, gaan ze eigenlijk altijd naast elkaar en nooit boven elkaar staan.

In de matrix in Voorbeeld 1.2 is de eerste kolom dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, en is de eerste rij $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. De getallen in een matrix kunnen zowel positief als negatief zijn, en het aantal kolommen en rijen hoeft niet gelijk te zijn.

Voorbeeld 1.3. De matrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ heeft twee rijen en drie kolommen. Elke rij bestaat uit drie getallen, en elke kolom bestaat uit twee getallen.

Vraag 1.4. Welk getal staat in rij 1 en kolom 2 in de matrix van Voorbeeld 1.3?

1.3 Spellen als matrices

We zullen vaak een spel voor twee spelers weergeven met een matrix.

Als we een spel voor twee spelers weergeven in een matrix, dan komt elke **rij** overeen met een mogelijke actie van **speler 1**, en komt elke **kolom** overeen met een actie van **speler 2**. Als de spelers hun acties gekozen hebben, dan staat de uitkomst van het spel in de rij die correspondeert met de actie van speler 1 en de kolom die correspondeert met de actie van speler 2.

We kunnen voor beide spelers een aparte matrix opstellen met de uitkomsten voor die speler. We kunnen ook de uitkomsten voor beide spelers samenvoegen tot één matrix, met op elke positie twee getallen: eerst de uitkomst voor speler 1 en dan de uitkomst voor speler 2, gescheiden door een puntkomma. Dat heet een **bimatrix**. Dit is het makkelijkst in een voorbeeld te zien, zie Voorbeeld 1.5.

Als we een spel voor twee spelers weergeven in een matrix, dan heet de eerste speler de **rijspeler** en de tweede speler de **kolomspeler**. De acties van de eerste speler komen namelijk overeen met de rijen in de matrix, en de acties van de tweede speler met de kolommen.

Voorbeeld 1.5. We kunnen het spel Steen, papier, schaar van Voorbeeld 1.1 als volgt in een matrix weergeven. Filip is de rijspeler en Tijn de kolomspeler. De matrix hierbij voor Filip is

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Steen} & \text{Papier} & \text{Schaar} \end{array} \\ \begin{array}{c} \underline{\text{Steen}} \\ \underline{\text{Papier}} \\ \underline{\text{Schaar}} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Filip kiest tussen de rood onderstreepte woorden als rijspeler en Tijn kiest één van de kolommen. De winst die Filip krijgt, staat dan in de rij die Filip gekozen heeft en de kolom die Tijn gekozen heeft.

Voor Tijn kunnen we ook een matrix opschrijven met zijn winst erin:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \underline{\text{Steen}} & \underline{\text{Papier}} & \underline{\text{Schaar}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Steen} \\ \text{Papier} \\ \text{Schaar} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Tijn kiest één van de blauw onderstreepte woorden als kolomspeler en Filip één van de rijen.

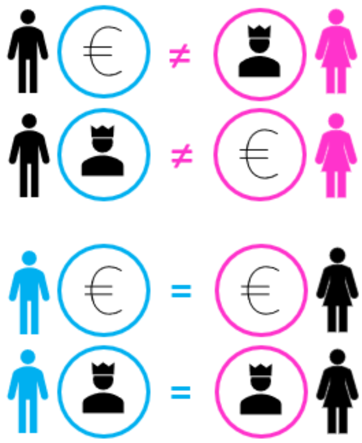
Om niet telkens twee matrices op te hoeven schrijven, kunnen we ze samenvoegen tot een bimatrix. Deze bevat op elke positie precies twee getallen; één voor de rijspeler en één voor de kolomspeler. De rijspeler (in dit geval Filip) zijn winst staat links van de puntkomma en de kolomspeler (Tijn) zijn winst staat rechts van de puntkomma.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{Steen} & \text{Papier} & \text{Schaar} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Steen} \\ \text{Papier} \\ \text{Schaar} \end{array} & \begin{pmatrix} 0;0 & -1;1 & 1;-1 \\ 1;-1 & 0;0 & -1;1 \\ -1;1 & 1;-1 & 0;0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Als Filip steen speelt en Tijn papier, dan zal Filip verliezen (-1) en Tijn winnen (1). Deze uitkomst van het spel staat in de eerste rij en de tweede kolom, dit is $-1; 1$.

Voorbeeld 1.6. We kijken nu naar het spel “Matching pennies”. In dit spel krijgen beide spelers een munt en kiezen ze tegelijk of ze kop of munt naar boven leggen. Als beide spelers dezelfde keuze maken wint speler 1 en anders wint speler 2. In een bimatrix ziet dit er als volgt uit:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{Kop} & \text{Munt} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Kop} \\ \text{Munt} \end{array} & \begin{pmatrix} 1;-1 & -1;1 \\ -1;1 & 1;-1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$



Vraag 1.7. We kunnen het spel Matching pennies aanpassen door beide spelers ook nog de optie te geven de munt op zijn zijkant te leggen. Speler 1 wint nog steeds als beide spelers dezelfde optie kiezen en verliest anders. Hoe ziet de bimatrix van dit spel eruit?

1.4 Nulsomspellen

> Een **nulsomspel** (zero-sum game) is een spelvorm waarbij de winst van alle spelers bij elkaar opgeteld uitkomt op 0, bij elke uitkomst van het spel. De winst van een speler kan hierbij zowel een positief als een negatief getal zijn—we beschrijven een verlies dus als een negatieve winst.

Alle winst die je krijgt in een nulsomspel levert een gelijke hoeveelheid verlies voor je tegenstander(s). Dit is het geval bij veel spellen, zoals dammen, schaken, poker, en ook bij Steen, papier, schaar en bij Matching pennies. Als een speler bij Matching pennies wint en een speler verliest, is de som van de winsten van de spelers $1 + (-1) = 0$.

Een nulsomspel kan ook in een bimatrixvorm opgeschreven worden, waarbij de eerste waarde de winst voor speler 1 is en de tweede waarde de winst voor speler 2. Hieronder staat een nulsomspel in bimatrixvorm.

$$\begin{pmatrix} 1;-1 & 0;0 & -2;2 \\ -4;4 & 9;-9 & 4;-4 \end{pmatrix}.$$

Bij een nulsomspel tellen de waardes op een plaats in de bimatrix altijd op tot 0. Hierdoor is het voldoende om bij een nulsomspel met twee spelers alleen de winst voor **speler 1** op te schrijven, aangezien de winst voor speler 2 gelijk is aan het negatieve van de winst van speler 1. Daarom beschrijven we een nulsomspel meestal als een gewone matrix in plaats van een bimatrix: de matrix met de uitkomsten voor speler 1.

Hieronder staat hetzelfde nulsomspel, maar dan in gewone matrixvorm. Hier is in de tweede rij en derde kolom bijvoorbeeld de winst van speler 1 gelijk aan 4. Omdat het een nulsomspel is weten we dan al dat speler 2 een winst van -4 zal hebben, dus dit hoeven we niet meer op te schrijven.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Er zijn ook spellen die geen nulsomspel zijn. Bij voetbalwedstrijden krijgt de winnaar 3 punten, de verliezer 0 en bij gelijkspel allebei 1. Hierdoor is de som van de winsten na een gespeelde wedstrijd 2 of 3.

Vraag 1.8. Jasper (speler 1) en Annet (speler 2) spelen een spel waarbij ze allebei één van de getallen 0, 2 of 4 kiezen. Als Jasper het getal j gekozen heeft, en Annet het getal a, dan geeft Jasper $j + a$ euro aan Annet, en geeft vervolgens Annet $j \cdot a$ euro aan Jasper. De winst voor elke speler is het geldbedrag dat hij of zij netto ontvangt. Leg uit dat dit een nulsomspel is, en geef de bijbehorende (gewone) matrix.

1.5 Strategieën

Het voordeel van spellen weergeven in een (bi)matrix, is dat er snel informatie af te lezen is. Doordat de informatie in een matrix staat, zijn er ook bepaalde berekeningen mee te doen die kunnen helpen voor de beste strategie te kiezen.

In elk spel hebben de spelers een aantal mogelijke **acties**. Dit zijn de keuzes die ze kunnen maken.

We zagen dat in het spel Steen, papier, schaar, de mogelijke acties voor beide spelers "steen", "papier" en "schaar" zijn. In de speltheorie kiezen spelers meestal niet direct welke actie ze spelen, maar kiezen ze met welke **kans** ze elke actie spelen.

Een **strategie** van een speler geeft voor elke actie van deze speler aan met welke kans deze actie gespeeld wordt.

De strategie wordt opgeschreven als een rij getallen met ronde haken eromheen. Het aantal getallen is gelijk aan het aantal acties en op elke plaats in de rij staat de kans om de bijbehorende actie te kiezen.

Een kans is een getal tussen 0 en 1 en is 0 als het nooit gebeurt en 1 als het altijd gebeurt. De rij getallen die een strategie weergeeft moet bij elkaar opgeteld altijd 1 zijn, want er wordt altijd precies één actie gespeeld.

De strategie om willekeurig tussen steen, papier en schaar te kiezen zou opgeschreven worden als $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ en de strategie om willekeurig tussen steen en papier te kiezen, maar nooit schaar te spelen als $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$. In het spel Matching pennies zou de strategie “ik speel altijd munt” opgeschreven worden als $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$.

Een strategie waarin altijd dezelfde actie gekozen wordt, heet een **pure strategie**. In een pure strategie is precies één van de kansen 1 en zijn alle andere kansen 0. Een strategie die niet puur is, heet **gemengd**.

Als we nog niet weten met welke kans een speler een actie speelt, kunnen we hiervoor variabelen gebruiken. Als speler 1 bijvoorbeeld drie mogelijke acties heeft en we nog niet weten met welke kansen deze acties gespeeld worden, kunnen we de strategie van speler 1 schrijven als $\begin{pmatrix}p & q & r\end{pmatrix}$, waarbij p, q en r getallen tussen 0 en 1 zijn met $p+q+r=1$. Als speler 2 twee mogelijke acties heeft, schrijven we de strategie van speler 2 in het algemeen bijvoorbeeld als $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ met $x+y=1$ en ook hier geldt dat x en y tussen 0 en 1 in liggen. Deze strategie voor speler 2 kunnen we ook schrijven als $\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}$, met x tussen 0 en 1.

1.6 Verwachtingswaarde

Als beide spelers een strategie hebben gekozen, dan heeft elke uitkomst van een spel een bepaalde kans. Dan staat de uitkomst van het spel niet vast, maar we weten wel wat de **kans** is op elke mogelijke uitkomst.

Het is interessant om te weten wat gemiddeld de uitkomst van een spel is als het vaak herhaald wordt. De term die we hiervoor gebruiken is de **verwachtingswaarde**, of ook wel de **verwachte winst**. Je kunt de verwachtingswaarde berekenen door de som van alle uitkomsten te nemen, gewogen met de kans die bij die uitkomst hoort.

Voorbeeld 1.9. Stel dat beide spelers in Matching pennies altijd kop spelen. Dat wil zeggen dat ze allebei de pure strategie $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ spelen. Dan is de verwachtingswaarde van de winst van speler 1 gelijk aan 1, want beide munten liggen altijd met dezelfde kant naar boven, dus speler 1 wint altijd.

Als speler 1 altijd kop speelt (strategie $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$) en speler 2 altijd munt (strategie $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$), dan is verwachtingswaarde van speler 1 gelijk aan -1, want er liggen altijd twee verschillende munten.

Als speler 1 en 2 allebei de strategie $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ spelen, dan is de kans dat beide spelers kop spelen $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ en dat beide spelers munt spelen $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. De kans dat speler 1 één punt scoort, vinden we door de kansen op de mogelijkheden om één punt scoren op te tellen. We tellen de kans dat beide spelers kop spelen en de kans dat beide spelers munt spelen bij elkaar op, dus $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$. Dan is de kans dat speler 1 één punt verliest, gelijk aan $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

Nu weten we alle relevante kansen, en kunnen we de verwachtingswaarde berekenen. We nemen de som over de mogelijke uitkomsten (over 1 en -1) en wegen die met de bijbehorende kansen ($\frac{5}{9}$ en $\frac{4}{9}$ respectievelijk). Dus

$$\text{verwachtingswaarde van speler } 1 = 1 \cdot \frac{5}{9} + (-1) \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}.$$

Vraag 1.10. Als Gerbrich in Steen, papier, schaar de strategie $\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ speelt en Madelon $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, wat is dan de verwachte winst van Madelon? Beredeneer zonder berekening wat de verwachte winst is voor Gerbrich.

Hoofdstuk 2

De beste strategie kiezen

Bij elk spel is het een belangrijke vraag welke strategie een speler het beste kan kiezen. Hierop zijn verschillende antwoorden mogelijk, die afhangen van wat je "het beste" vindt. Wil je er bijvoorbeeld voor zorgen dat je zeker weet dat je minstens een bepaalde winst behaalt? Of vind je het belangrijker dat je maximaal een bepaald verlies lijdt? Het is ook belangrijk om te weten wanneer een bepaalde actie altijd een betere uitkomst oplevert dan een andere actie, ongeacht wat de andere speler doet. Dan zeggen we dat de ene actie de andere **domineert**. Een slimme speler zal de gedomineerde actie dan nooit uitvoeren. Hiermee rekening houden kan het makkelijker maken om de beste strategie te kiezen.

2.1 Pure maximin en minimax strategieën

Twee strategieën die interessant kunnen zijn voor de spelers van een spel zijn de maximin strategie en de minimax strategie. We beperken ons in dit document tot het vinden van maximin strategieën voor speler 1 en minimax strategieën voor speler 2, maar andersom zou ook kunnen.

Laten we beginnen met de iets simpelere versie van **pure** maximin en **pure** minimax strategieën. Zoals we zagen in Paragraaf 1.5 is een pure strategie een strategie waarbij altijd dezelfde actie wordt gespeeld.

> De **pure maximin strategie** van speler 1 is de pure strategie die zorgt voor het maximaliseren van zijn minimale winst.

Wat betekent het maximaliseren van de minimale winst van speler 1 precies? We kijken nu naar pure strategieën, waarbij speler 1 altijd dezelfde actie speelt. Stel nu dat speler 1 de pure strategie speelt waarbij hij altijd actie a kiest. Elke actie b van speler 2 levert dan een bepaalde winst op voor speler 1. In het slechtste geval voor speler 1 kiest speler 2 de actie b waarvoor de winst voor speler 1 het kleinst is. Die kleinste winst noemen we de minimale winst als speler 1 actie a speelt. Deze kan voor elke actie a van speler 1 anders zijn. Het maximaliseren van de minimale winst van speler 1 betekent nu dat speler

1 de actie a kiest waarvoor deze minimale winst zo groot mogelijk is. Dit lijkt nu misschien wat abstract, zie Voorbeeld 2.1 om dit wat concreter te maken.

De **pure minimax strategie** van speler 2 is de pure strategie die zorgt voor het minimaliseren van zijn maximale verlies.

Door deze strategie te spelen weet speler 2 dat zijn maximale verlies zo klein mogelijk is. Speler 2 bekijkt het grootste verlies dat kan voorkomen bij het spelen van elk van zijn acties. Door vervolgens de actie met het laagste hoogste verlies te kiezen, beperkt de speler het verlies. Het hangt nu nog van speler 1 af of hij inderdaad het hoogste verliest of dat hij minder verliest of iets wint.

Voorbeeld 2.1. Pure maximin

We bekijken een nulsomspel dat beschreven wordt door de volgende matrix:

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & -2 & 6 \\ 2 & -8 & -4 & 5 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

De getallen in de matrix zijn de winst voor Harm (speler 1) en het verlies voor Inge (speler 2). Harm is speler 1, dus de rijspeler: zijn acties komen overeen met de rijen van de matrix. Inge is de kolomspeler: haar acties komen overeen met de kolommen.

We gaan de pure maximin strategie van Harm bepalen. Dit doen we door in elke rij te kijken naar de minimale winst van Harm. In de volgende matrix hebben we deze waardes rood gemaakt.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{-2} & 7 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & \color{red}{-2} & 6 \\ 2 & \color{red}{-8} & -4 & 5 \\ 9 & 7 & 9 & \color{red}{3} \end{pmatrix}.$$

Er volgt dat Harm altijd minimaal -2, -8 of 3 wint. Het maximum van -2, -8 en 3 is 3, en die maximale 3 kwam uit rij 4. De conclusie is dat de pure maximin-strategie voor Harm is om altijd de actie te spelen die bij rij 4 hoort. Dit is de strategie $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. We zeggen ook wel: "de pure maximin strategie voor Harm is rij 4".

Pure minimax

Omdat dit een nulsomspel is, is het verlies voor Inge precies de winst voor Harm. Voor de pure minimax strategie kijkt Inge per kolom wat de maximale winst voor Harm, en dus haar maximale verlies, kan zijn. In onderstaande matrix zijn per kolom de hoogste waardes rood gemaakt.

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & -2 & 6 \\ 2 & -8 & -4 & 5 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Als er nu gekeken wordt naar het minimum van 9, 9, 9 en 8 is dit 8. De pure minimax-strategie voor Inge is daarom om altijd de actie te spelen die bij kolom 4 hoort.

Als Inge deze strategie speelt, dan wint Harm (en verliest Inge) maximaal het minimum van de vier maximale uitkomsten, dus 8. In het voorbeeld had Inge maximaal 9 kunnen verliezen als ze een van de kolommen 1–3 gespeeld had, maar door voor kolom 4 te kiezen, zorgt Inge er voor dat haar verlies maximaal 8 wordt. Als Harm een andere rij dan rij 1 speelt, wordt Inge haar verlies bij het spelen van kolom 4 maar 3, 5 of 6.

Harm zijn pure maximin-actie van rij 4 garandeert hem een winst van minstens 3. Met haar pure minimax-actie van kolom 4 garandeert Inge een verlies van maximaal 8. In het bijzonder zien we dat deze gegarandeerde waarden niet aan elkaar gelijk hoeven te zijn.

Vraag 2.2. Stel dat een nulsomspel tussen twee spelers wordt beschreven door deze matrix:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de pure maximin strategie voor speler 1 en de pure minimax strategie voor speler 2.

2.2 Gemengde maximin en minimax strategieën

We gaan nu kijken naar maximin en minimax strategieën die niet per se puur hoeven te zijn, en dus gemengd mogen zijn. Dat betekent dat niet vaststaat welke actie een speler speelt, alleen met welke kansen hij elke actie speelt.

Als speler 1 een strategie gekozen heeft, dan zagen we dat we bij elke actie van speler 2 een verwachte winst voor een strategie van speler 1 uit kunnen rekenen. Het slechtste geval voor speler 1 is als speler 2 de actie speelt waarvoor deze verwachte winst het laagste is. Dan noemen we die verwachte winst de **minimale verwachte winst**, bij de gekozen strategie van speler 1. De strategie van speler 1 waarbij de laagste van deze verwachte winsten het hoogste is, heet de maximin strategie.

> Een **maximin strategie** van speler 1 maximaliseert de minimale verwachte winst van speler 1.

Analoog aan de maximin strategie voor speler 1 kan speler 2 een minimax strategie spelen, waarbij zijn maximale verwachte verlies zo laag mogelijk is.

Een **minimax strategie** van speler 2 minimaliseert het maximale verwachte verlies van speler 2.

In Paragraaf 2.3 zullen we zien hoe je, in sommige gevallen, de maximin strategie van speler 1 en de minimax strategie van speler 2 kunt bepalen.

Voorbeeld 2.3. We kijken naar het spel Matching Pennies uit Voorbeeld 1.6. We bepalen eerst de verwachte winst als speler 1 de strategie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ speelt, oftewel altijd kop naar boven legt. Als speler 2 nu "kop" speelt, is de verwachte winst van speler 1 gelijk aan 1, en anders aan -1. De minimale verwachte winst is dan het minimum van deze twee getallen, dus -1. We kunnen laten zien dat dit geen maximin strategie is door een strategie met een grotere minimale verwachte winst te vinden.

Speler 1 kan bijvoorbeeld ook de strategie $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ spelen. Hierbij is de verwachte winst als speler 2 "kop" speelt gelijk aan $1 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ en gelijk aan $1 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ als speler 2 "munt" speelt. (Dit is steeds 1 keer de kans op een winst van 1 plus -1 keer de kans op een winst van -1.) Bij deze strategie is de minimale verwachte winst dus $-\frac{1}{3}$.

Vraag 2.4. Kun je nu zien wat in Matching pennies de maximin strategie voor speler 1 is?

Het maximaliseren van je minimale verwachte winst klinkt misschien niet als de optimale manier om een spel te spelen. Zou je niet veel meer kunnen verdienen door meer risico te nemen? Deze vraag wordt beantwoord door de **stelling van von Neumann**, die beschouwd wordt als het beginpunt van de speltheorie.

Bij een spel met twee spelers zijn de volgende getallen gelijk:

- de minimale verwachte winst die speler 1 krijgt als hij een maximin strategie speelt
- het maximale verwachte verlies dat speler 2 lijdt als hij een minimax strategie speelt.

Dit getal heet de **waarde van het spel**.

Deze stelling werd in 1928 bewezen door John von Neumann, een Hongaarse wiskundige en een van de grondleggers van de speltheorie. Een bewijs van deze stelling gaat te ver voor dit document. Zie bijvoorbeeld Theorem II.4.1 in het boek "Game theory" van Guillermo Owen (third edition, Academic Press, 1995) voor een bewijs.

We gaan de stelling van von Neumann in de volgende paragraaf toepassen om gemengde maximin en minimax strategieën te vinden. Daarbij gebruiken we ook een gevolg van die stelling.

Bij elk nulsomspel met twee spelers geldt het volgende.

- Stel dat speler 1 een maximin strategie speelt, en dat er voor speler 2 een minimax strategie bestaat waarin geen enkele kans nul is. Dan is bij **elke** strategie van speler 2 de verwachte winst van speler 1 gelijk aan de waarde van het spel.
- Stel dat speler 2 een minimax strategie speelt, en dat er voor speler 1 een maximin strategie bestaat waarin geen enkele kans nul is. Dan is bij **elke** strategie van speler 1 het verwachte verlies van speler 2 gelijk aan de waarde van het spel.

Dit feit kan worden afgeleid uit de stelling van von Neumann, maar de afleiding laten we hier achterwege.

Merk op dat we in het eerste punt van dit gevolg aannnemen dat speler 1 een maximin strategie speelt, en dat we voor speler 2 alleen aannemen dat er een minimax strategie met de genoemde eigenschap *bestaat*. We nemen dus niet aan dat speler 2 die ook speelt: de uitspraak gaat vervolgens over *elke* strategie van speler 2. In het tweede punt van het gevolg is deze situatie omgekeerd.

2.3 Gemengde maximin en minimax strategieën vinden

In het algemeen is het niet zo makkelijk om een gemengde maximin of minimax strategie te vinden. Maar dit kan wél als speler 1 maar twee mogelijke acties heeft.

Stel dat Sjoerd (speler 1) en Wouter (speler 2) een nulsomspel spelen waarbij speler 1 twee mogelijke acties heeft. Dan heeft de bijbehorende matrix twee rijen, en is er voor Sjoerd (speler 1) een specifieke manier om een maximin strategie te vinden. Dit is meestal geen pure strategie.

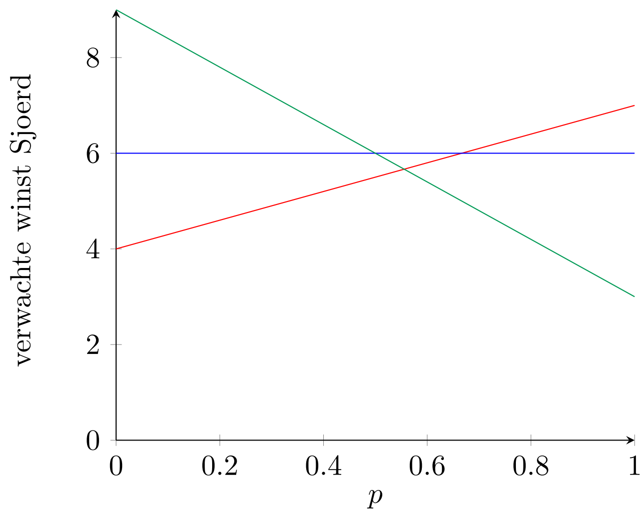
Bekijk het nulsomspel dat beschreven wordt door de volgende matrix.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Voor elke kolom die Wouter (speler 2) kan kiezen kunnen we de verwachte winst van Sjoerd afhankelijk van zijn strategie opschrijven. Sjoerd heeft twee mogelijke acties, dus zijn strategie zouden we normaal schrijven als $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$. Maar omdat $p + q$ moet uitkomen op 1, kan dit ook geschreven worden als $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$, met $0 \leq p \leq 1$. Het bepalen van een strategie voor Sjoerd is dan hetzelfde als het bepalen van p. Met deze notatie kunnen we de verwachte winst van Sjoerd schrijven voor elke kolom die Wouter kan kiezen. Dit geeft de volgende verwachte winsten

kolom 1	$7p + 4(1-p) = 3p + 4,$
kolom 2	$6p + 6(1-p) = 6,$
kolom 3	$3p + 9(1-p) = 9 - 6p.$

Als Wouter kolom 1 kiest, is de verwachte winst voor Sjoerd gegeven door $3p+4$, waar p de kans is dat Sjoerd rij 1 kiest. Deze drie winstformules kunnen we in een grafiek zetten met op de horizontale as p en op de verticale as de verwachte winst van Sjoerd. Dit ziet er in dit geval als volgt uit:



We zijn op zoek naar een strategie die de minimale verwachte winst maximaliseert, dus een strategie waarbij de laagste lijn in de grafiek zo hoog mogelijk is. In de grafiek kunnen we zien dat dit gebeurt bij het snijpunt van de rode en groene lijnen, die horen bij de formules "verwachte winst $= 3p+4$" en "verwachte winst $= 9 - 6p$" hierboven. Als we deze twee formules aan elkaar gelijkstellen kunnen we p als volgt vinden.

$$\begin{aligned} 3p + 4 &= 9 - 6p \\ 3p &= 5 - 6p \\ 9p &= 5 \\ p &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

De maximin strategie die we nu voor Sjoerd hebben gevonden is $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$. De minimale verwachte winst die Sjoerd hiermee verdient, is de waarde van het spel. Deze waarde kunnen we vinden door in de grafiek van hierboven weer naar het punt te kijken waar de laagste lijn zo hoog mogelijk is. We weten al dat de x-waarde van dit punt $\frac{5}{9}$ is en dat dit punt het snijpunt is van $3p + 4$

en $9 - 6p$. Door $p = \frac{5}{9}$ in één van deze twee formules in te vullen vinden we dat de waarde van het spel gelijk is aan

$$3 \cdot \frac{5}{9} + 4 = 9 - 6 \cdot \frac{5}{9} = 5\frac{2}{3}.$$

Nu we de waarde van het spel hebben gevonden kunnen we ook een minimax strategie voor Wouter vinden. We noteren de strategie van Wouter voor nu als $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. We hebben gezien dat er een maximin strategie $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ voor Sjoerd bestaat waarin beide kansen niet nul zijn. Vanwege het tweede punt in het gevolg van de stelling van von Neumann in de vorige paragraaf is daarom het verwachte verlies van Wouter bij een minimax strategie voor elke strategie van Sjoerd gelijk aan de waarde van het spel, dus $5\frac{2}{3}$. Als we dit toepassen op de pure strategieën van Sjoerd waarbij hij altijd de eerste rij speelt of altijd de tweede rij, dan vinden we

$$7x + 6y + 3z = 5\frac{2}{3};$$
$$4x + 6y + 9z = 5\frac{2}{3}.$$

Omdat de totale kans op alle mogelijke acties van Wouter moet optellen tot 1, geldt ook nog de formule $x + y + z = 1$. Nu hebben we drie vergelijkingen en drie onbekende variabelen.

Vraag 2.5. Wat zijn x, y en z in de minimax strategie van Wouter?

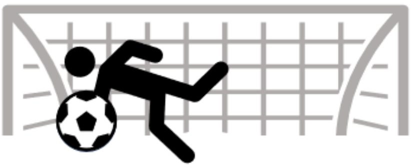
2.4 Toepassing: penalty's

Soms worden er bij voetbalwedstrijden penalty's genomen op doel. Hierbij kunnen zowel Jasper Cillessen (keeper) als Lionel Messi (veldspeler) kiezen voor naar links of naar rechts schieten/verdedigen. Messi schiet met zijn rechterbeen en hierdoor is het voor hem makkelijker om links in de goal te schieten. Dit noemen we de natuurlijke kant. Als Messi voor de andere kant kiest, noemen we dit de onnatuurlijke kant. Cillessen weet welke kant de voorkeur is van Messi en Messi weet ook dat Cillessen dit weet.

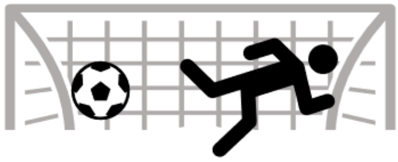
De percentages bij de plaatjes hieronder zijn gevonden na een onderzoek van 1417 penalty's die genomen zijn tussen 1995 en 2000, waarbij het percentage de kans geeft dat de veldspeler scoort bij de keeper.

We modelleren het schieten van penalty's als een nulsomspel, waarbij de winst voor veldspeler Messi (speler 1) de kans is dat hij een doelpunt maakt. Dit is dus gelijk aan het verlies van keeper Cillessen (speler 2).

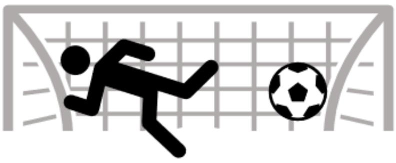
Vraag 2.6. Geef de matrix die dit spel beschrijft. Neem voor beide spelers de natuurlijke kant als eerste actie.



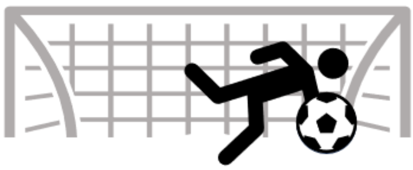
Messi schiet de natuurlijke kant op, Cillessen verdedigt de natuurlijke kant. Kans op goal 70%.



Messi schiet de natuurlijke kant op, Cillessen verdedigt de onnatuurlijke kant. Kans op goal 93%.



Messi schiet de onnatuurlijke kant op, Cillessen verdedigt de natuurlijke kant. Kans op goal 95%.



Messi schiet de onnatuurlijke kant op, Cillessen verdedigt de onnatuurlijke kant. Kans op goal 58%.

Vraag 2.7. (a) Vind de maximin strategie voor de veldspeler.

(b) Vind de waarde van het spel.

(c) Vind de minimax strategie voor de keeper.

(Voor het gemak mag je in elk onderdeel je antwoord afronden op twee cijfers na de komma, ook als dit berekeningen in volgende onderdelen beïnvloedt.)

In praktijk blijkt de strategie van de veldspelers $\begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}40 \end{pmatrix}$ te zijn, dus veldspelers schieten in 40% van de gevallen naar de onnatuurlijke kant. De strategie van de keepers is $\begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix}$, waarbij de keeper dus in 42% van de gevallen de onnatuurlijke kant van de goal verdedigt. Dit ligt erg dicht bij de maximin en minimax strategieën. Professionele voetballers houden zich dus onbewust erg goed aan de optimale strategieën volgens de speltheorie.

2.5 Strikt gedomineerde acties

In een spel kan het voorkomen dat een actie altijd slechter is dan een andere actie van dezelfde speler. Hierdoor zal de speler deze slechtere actie nooit spelen. In zo'n geval noemen we deze actie strikt gedomineerd.

> In de matrix van een nulsomspel is een rij **strikt gedomineerd** als in **een** andere rij op elke plaats de waarde strikt groter is. De kolomspeler wil graag een lage waarde hebben, daarom is een kolom strikt gedomineerd als er een andere kolom bestaat met op elke plaats een strikt kleinere waarde.

(We zeggen dat een getal “strikt groter” is dan een ander getal als we willen benadrukken het echt groter is, en niet alleen maar groter dan of gelijk aan dat getal. “Strikt kleiner” gebruiken we net zo.)

Vraag 2.8. Je ouders willen graag dat je de was ophangt en de boodschappen doet, maar natuurlijk heb je hier zelf geen zin in. Je zegt dat je het wel wilt doen, maar dat je €10,- krijgt als beloning. Je ouders komen met het volgende spel.

Was ophangen

Boodschappen doen

$$\begin{pmatrix} \text{Was ophangen en €10} & \text{Boodschappen doen} \\ \text{Was ophangen} & \text{Boodschappen doen} \\ \text{Was ophangen en €5} & \text{Boodschappen doen en €5} \end{pmatrix}$$

Jij mag de rij kiezen en je ouders gooien een muntje op voor de kolom. Jouw rij en de kolom van je ouders samen geven de taak die je moet uitvoeren en je beloning. Zie je welke van jouw rijen strikt gedomineerd is en door welke rij?

> Een strikt gedomineerde rij of kolom zal nooit gespeeld worden, daarom kunnen we deze **weglaten uit de matrix** zonder het spel te veranderen: een slimme speler zal de bijbehorende actie nooit spelen.

Deze regel kunnen we soms zelfs een aantal keer na elkaar toepassen om de matrix van een spel te vereenvoudigen. In het voorbeeld hieronder laten we zien hoe.

Voorbeeld 2.9. Lily en Paul spelen een nulsomspel tegen elkaar, waarbij Lily de rijspeler is en Paul de kolomspeler. Het spel wordt beschreven door deze matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Onafhankelijk van welke rij Lily speelt, levert kolom 3 voor Paul altijd een groter verlies op dan kolom 1. Hierdoor is de derde kolom strikt gedomineerd door kolom 1. Kolom 3 zal nooit gespeeld worden, daarom kunnen we deze weglaten uit de matrix.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ want } \begin{matrix} 4 < 6 \\ 1 < 5 \\ 3 < 7 \end{matrix}.$$

Lily wil altijd de hoogst mogelijke winst krijgen. Hierdoor zal Lily nooit voor rij 3 kiezen, aangezien deze bij allebei de acties van Paul minder winst geeft dan het spelen van rij 1. Hierdoor is rij 3 strikt gedomineerd door rij 1 en hierdoor kan de matrix opgeschreven worden zonder rij 3.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \\ \color{red}{3} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ want } \begin{matrix} 4 > \color{red}{3} \\ 2 > \color{red}{1} \end{matrix}.$$

Nu zijn er geen strikt gedomineerde rijen en kolommen meer, dus kan de matrix niet verder versimpeld worden.

Merk op dat het voor kan komen dat er eerst een strikt gedomineerde rij of kolom verwijderd moet worden, voordat de volgende verwijderd kan worden. In het voorbeeld moet eerst kolom 3 verwijderd worden voordat rij 3 weggehaald kan worden. Eerst rij 3 had niet gekund, want 7 is niet kleiner dan 5 of 6.

Een strategie voor speler 1 kunnen we nu opschrijven in de vorm $\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix}$ en voor speler 2 ook in de vorm $\begin{pmatrix} r & s & 0 \end{pmatrix}$. Het laatste getal is 0, omdat we deze rij/kolom nooit spelen, omdat deze strikt gedomineerd is. De getallen p en q tellen samen op tot 1 en zo ook de getallen r en s. De vier getallen zijn ook allemaal positief.

2.6 Strikt dominante acties

Een **strikt dominante actie** is een actie die een speler altijd het beste kan spelen, ongeacht wat zijn tegenstander doet. In de bijbehorende rij of kolom zijn **alle** waardes strikt groter dan de waardes op dezelfde plekken in andere rijen of kolommen. Er kan hierdoor ook maar één strikt dominante actie zijn per speler, ook kan het voorkomen dat er geen bestaat binnen het spel.

Als actie 1 beter is dan actie 2 betekent dit dat actie 2 een strikt gedomineerde actie is. Het betekent niet meteen dat actie 1 per definitie een strikt dominante actie is. Een strikt dominante actie is beter dan **alle** andere acties. Bij een strikt gedomineerde actie is een andere actie beter dan de strikt gedomineerde actie, maar is deze andere actie niet per se beter dan alle andere acties en daarmee niet meteen een strikt dominante actie.

Voorbeeld 2.10. Twee huisgenoten willen hun muur verven. Ze kiezen allebei tussen twee kleuren verf, en mengen hun keuzes om de muurkleur te bepalen. Alec kiest tussen de kleuren rood en blauw en Sterre kiest tussen de kleuren rood en geel. Ze komen erachter dat ze precies elkaars tegenoverliggende mening hebben. Alec wil bijvoorbeeld het liefste oranje en geeft dit 4 punten, terwijl Sterre oranje de lelijkste kleur vindt, en dit -4 punten geeft. Onderstaande matrix is gemaakt op basis van de mening van Alec. Omdat Alec en Sterre precies de tegenovergestelde mening hebben is dit spel een nulsomspel.

rood + rood = rood | rood + geel = oranje | blauw + geel = groen | blauw + rood = paars

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc} \text{Rood} & \text{Geel} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Rood} \\ \text{Blauw} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Uit de matrix kan worden afgelezen dat Alec het liefste de rode actie speelt; als Sterre rood kiest, kiest Alec ook voor rood en als Sterre voor geel kiest, kiest Alec weer voor rood, aangezien de waardes in de rode rij groter zijn dan die in de blauwe rij. Alec zal hierdoor nooit voor blauw kiezen. Hierdoor is de rode actie een strikt dominante actie. Hiermee is ook meteen Alecs blauwe actie strikt gedomineerd door de rode actie.

Vraag 2.11. Heeft Sterre in bovenstaand voorbeeld ook een strikt dominante actie? Waarom?

2.7 Acties gedomineerd door strategieën

Het kan ook gebeuren dat een actie niet strikt gedomineerd wordt door een andere actie, maar wel door een combinatie van andere acties.

> Een actie van een speler is **strikt gedomineerd door een strategie** als die strategie altijd een betere verwachte winst geeft dan die actie. (Oftewel: dan de pure strategie waarbij altijd die actie wordt gespeeld.)

We leggen dit uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 2.12. Twee spelers spelen een nulsomspel dat wordt beschreven door deze matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Voor de verduidelijking hebben we de getallen in de matrix een bepaalde kleur gegeven. Verder in het voorbeeld merk je waarom.

We gaan proberen voor speler 1 een strategie te vinden die een combinatie is van de tweede en derde rij, en bij elke actie van speler 2 meer winst oplevert voor speler 1 dan altijd de eerste rij spelen. Als we zo'n strategie vinden, dan mogen we de eerste rij weglaten uit de matrix zonder dat dit het spel verandert. Want dan is het nooit in het voordeel van speler 1 om rij 1 te spelen.

De strategie die dan gespeeld wordt, is $\begin{pmatrix}0 & p & q\end{pmatrix}$. Dit kunnen we ook opschrijven als $\begin{pmatrix}0 & p & 1-p\end{pmatrix}$ met $0 \leq p \leq 1$, aangezien er nog maar twee onbekende kansen zijn en de kansen moeten optellen tot 1. Een strategie die de eerste rij strikt domineert moet bij het spelen van elke kolom een grotere verwachte winst geven dan de uitkomst in de eerste rij.

We krijgen voor elke kolom een vergelijking. Als we met kans p de tweede rij spelen en met kans $1-p$ de derde rij zien die er zo uit:

$$\begin{aligned}
2p + 7(1-p) > 4 &\xrightarrow{\text{uitrekenen}} \quad p < \tfrac{3}{5}, \\
9p + 2(1-p) > 6 &\xrightarrow{\text{uitrekenen}} \quad p > \tfrac{4}{7}, \\
3p + 4(1-p) > 1 &\xrightarrow{\text{uitrekenen}} \quad p < 3.
\end{aligned}$$

Aan de laatste eis voldoen we al, want $p \leq 1$, dus wat overblijft, is

$$\frac{40}{70} = \frac{4}{7} < p < \frac{3}{5} = \frac{42}{70}.$$

Zolang p gekozen wordt tussen deze twee waardes in, is deze strategie sterker dan het spelen van rij 1 en is rij 1 strikt gedomineerd door de gemengde strategie $\begin{pmatrix}0 & p & 1-p\end{pmatrix}$ van de rijen 2 en 3. De eerste rij kan daarom uit de matrix verwijderd worden zonder dat het spel verandert. Als mogelijke strategie kan nu bijvoorbeeld $p = \frac{41}{70}$ gekozen worden. De strategie van speler 1 is dan $\begin{pmatrix}0 & \frac{41}{70} & \frac{29}{70}\end{pmatrix}$.

Vraag 2.13. Twee spelers spelen een nulsomspel dat beschreven wordt door deze matrix:

$$\begin{pmatrix}6 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Vind alle strategieën voor speler 2 die combinaties zijn van kolommen 1 en 3, en die kolom 2 strikt domineren.

Let op dat in een nulsomspel de kolomspeler een lage uitkomst van het spel wil hebben, want de getallen in de matrix geven het verlies van de kolomspeler aan.

Hoofdstuk 3

Het Nash-evenwicht

De maximin en minimax strategieën uit het vorige hoofdstuk kunnen gezien worden als optimale strategieën voor beide spelers. Een andere combinatie van strategieën die als optimaal gezien zou kunnen worden, is een **Nash-evenwicht**. Een Nash-evenwicht is een situatie waarin beide spelers de best mogelijke strategie spelen tegen de strategie van hun tegenstander.

Het Nash-evenwicht is in 1950 ingevoerd door de Amerikaanse wiskundige John Nash. Nash won, onder andere hiervoor, de Nobelprijs voor de economie in 1994 met John Harsanyi en Reinhard Selten. Hij werd bij het algemene publiek bekend door de film *A beautiful mind* uit 2001. Een versie van het Nash-evenwicht was al in 1838 gebruikt door de Franse wiskundige Antoine Cournot.

In dit hoofdstuk kijken we naar wat een Nash-evenwicht is, en hoe je het kunt vinden.

3.1 Beste reacties

Als de strategie van speler 1 al bekend is, is het voor speler 2 mogelijk om een optimale strategie hiertegen te spelen. Als speler 1 bijvoorbeeld in Steen, papier, schaar altijd "steen" speelt, zal speler 2 altijd "papier" willen spelen.

Vraag 3.1. Als speler 1 in Steen, papier, schaar de strategie $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ speelt, welke strategie geeft speler 2 dan de hoogste verwachte winst?

Als de strategie van speler 1 bekend is, dan is een strategie van speler 2 een **beste reactie** daarop als die strategie de hoogst mogelijke verwachte winst voor speler 2 oplevert bij de gegeven strategie van speler 1. We gebruiken dezelfde term als spelers 1 en 2 verwisseld zijn.

Als speler 1 in Matching pennies kop speelt, dan is de beste reactie van speler 2 hierop om munt te spelen. Het kan voorkomen dat de beste reactie niet een unieke strategie is. Als speler 1 in Matching pennies de strategie $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

speelt, dan is de verwachte winst voor speler 2 gelijk aan 0 onafhankelijk van de strategie die speler 2 kiest. Elke mogelijke strategie van speler 2 is dus een beste reactie op $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Vraag 3.2. Ook in Steen, papier, schaar is er een strategie voor speler 1, waarop elke strategie van speler 2 een beste reactie is. Welke strategie is dit?

3.2 Pure Nash-evenwichten

Als beide spelers een strategie spelen die een beste reactie is op de strategie van de andere speler, dan heet dit een **Nash-evenwicht**. Een **puur Nash-evenwicht** is een Nash-evenwicht waarbij beide spelers een pure strategie spelen, dus altijd dezelfde actie kiezen.

Pure Nash-evenwichten zijn makkelijker te vinden dan **gemengde Nash-evenwichten** waarbij de strategieën van beide spelers niet allebei puur zijn. In een puur Nash-evenwicht krijgen beide spelers dus de beste uitkomst die ze kunnen krijgen, gegeven de actie van de andere speler.

Nash heeft bewezen dat elk spel minstens één Nash-evenwicht heeft. Maar het kunnen er ook meer zijn. Niet elk spel heeft een puur Nash-evenwicht. Maar als ze er zijn, dan zijn pure Nash-evenwichten makkelijker te vinden dan gemengde Nash-evenwichten.

Als spellen meerdere keren achter elkaar gespeeld worden, zou dit kunnen betekenen dat de spelers steeds het Nash-evenwicht blijven spelen. Dit is in zeker zin optimaal, omdat beide spelers een beste reactie spelen. Maar zoals we later zullen zien, kan dit soms erg zonde zijn, omdat het Nash-evenwicht niet per se de hoogste winst geeft die spelers kunnen halen. Door beide van actie te veranderen, kan de winst soms voor beide spelers groter worden dan in het Nash-evenwicht. Een beroemd voorbeeld hiervan is het **gevangenen-dilemma**, zie Voorbeeld 3.6.

Voorbeeld 3.3. Laten we beginnen met spel dat wordt beschreven door deze bimatrix:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 37;\,10 & 8;\,6 & 2;\,7 \\ 39;\,20 & 48;\,50 & 41;\,37 \\ 1;\,47 & 33;\,5 & 4;\,23 \\ 39;\,28 & 50;\,39 & 27;\,2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(Dit is geen nulsomspel, want de winsten van de twee spelers tellen niet op tot nul!)

In deze matrix zoeken we bij elke pure strategie van een speler de beste actie voor de andere speler om te kiezen. Als speler 2 bijvoorbeeld de actie X speelt, dan kan speler 1 het beste B of D spelen. Dat geeft namelijk allebei een uitkomst van 39 voor speler 1, wat groter is dan 37 of 1. We bekijken nu voor elke actie van beide spelers welke actie van de andere speler hierbij het beste is, en onderstrepen de bijbehorende uitkomst in de bimatrix van het spel. Dat betekent concreet dat we in de bimatrix in elke kolom het linkergetal onderstrepen dat **het grootste is van alle linkergetallen in die kolom**, en in elke rij het rechtergetal dat **het grootste is van alle rechtergetallen in die rij**. Zo krijgen we de volgende matrix:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 37;\ \underline{10} & 8;\ 6 & 2;\ 7 \\ \underline{39};\ 20 & 48;\ \underline{50} & \underline{41};\ 37 \\ 1;\ \underline{47} & 33;\ 5 & 4;\ 23 \\ \underline{39};\ 28 & \underline{50};\ \underline{39} & 27;\ 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Als twee of meer getallen gelijk zijn en beide het grootste in de betreffende kolom of rij, zoals de getallen 39 in de matrix in de eerste kolom hierboven, dan onderstrepen we ze allebei.

Als bij een combinatie van acties beide uitkomsten onderstreept zijn, spelen beide spelers een beste actie bij de actie van de ander. In dit voorbeeld is dat alleen het geval bij de combinatie van acties $\begin{pmatrix} D & Y \end{pmatrix}$. Dit is dus het enige pure Nash-evenwicht van dit spel.

Vraag 3.4. Onderstreep bij de volgende matrix alle beste acties als reactie op de pure strategieën van de tegenstander en geef alle pure Nash-evenwichten.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20;12 & 14;13 & 5;19 & 11;6 \\ 8;15 & 2;10 & 19;18 & 6;12 \\ 7;3 & 11;5 & 3;20 & 9;15 \\ 18;8 & 10;13 & 6;20 & 9;4 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3 Gemengde Nash-evenwichten

In het algemeen is het moeilijk om Nash-evenwichten te vinden waarbij de strategieën niet puur hoeven te zijn, dus gemengd. We beperken ons nu tot spellen waarbij beide spelers maar twee mogelijke acties hebben, en laten zien hoe je dan een Nash-evenwicht kunt vinden. Dit doen we aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 3.5. We bekijken een spel dat gegeven wordt door de volgende bimatrix:

$$\begin{pmatrix} 5;3 & 2;5 \\ 4;5 & 5;1 \end{pmatrix}.$$

We noemen de kans dat speler 2 de eerste kolom speelt q. Dan is de verwachte winst van speler 1 bij het spelen van de eerste rij $5q + 2(1 - q)$ en bij de tweede rij $4q + 5(1 - q)$. Hieruit volgt dat de eerste rij een beste reactie is op strategieën van speler 2 die voldoen aan $5q + 2(1 - q) > 4q + 5(1 - q)$. Dit kunnen we vereenvoudigen:

$$\begin{aligned} 5q + 2(1 - q) &> 4q + 5(1 - q) \\ 5q + 2 - 2q &> 4q + 5 - 5q \\ 3q + 2 &> -q + 5 \\ 4q + 2 &> 5 \\ 4q &> 3 \\ q &> \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Voor $q > \frac{3}{4}$ is altijd de eerste rij spelen dus de beste reactie van speler 1. We zien net zo dat altijd de tweede rij spelen een beste reactie is op alle strategieën met $q < \frac{3}{4}$. Als $q = \frac{3}{4}$, dus bij de strategie $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ van speler 2, is de verwachte winst van speler 1 gelijk bij beide rijen. In deze situatie is elke mogelijke strategie van speler 1 een beste reactie.

Nu hebben we de beste reacties van speler 1 gevonden op alle strategieën van speler 2. We doen nu hetzelfde voor speler 2. We noemen de kans dat speler 1 de eerste rij speelt p. De verwachte winst als speler 2 de eerste kolom speelt is dan $3p + 5(1 - p)$, en bij de tweede kolom $5p + 1(1 - p)$. De eerste kolom is dus de beste keuze voor speler 2 als $3p + 5(1 - p) > 5p + 1(1 - p)$. Dit schrijven we om:

$$\begin{aligned} 3p + 5(1 - p) &> 5p + 1(1 - p) \\ 3p + 5 - 5p &> 5p + 1 - p \\ -2p + 5 &> 4p + 1 \\ -6p + 5 &> 1 \\ -6p &> -4 \\ 6p &< 4 \\ p &< \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dus de pure strategie waarbij speler 2 altijd de eerste kolom speelt is de beste reactie op de strategie $\begin{pmatrix} p & 1 - p \end{pmatrix}$ van speler 1 als $p < \frac{2}{3}$. Hieruit zien we net zo dat de pure strategie waarbij speler 2 altijd de tweede kolom speelt de beste reactie is als $p > \frac{2}{3}$ en dat elke strategie een beste reactie is als $p = \frac{2}{3}$, dus bij de strategie $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ van speler 1.

Om dit overzichtelijker te maken zetten we dit in een grafiek. We maken voor beide spelers een lijn die een beste reactie aangeeft op de strategie van de andere speler. Eerst vatten we nog een keer samen wat de beste reacties voor beide spelers zijn.

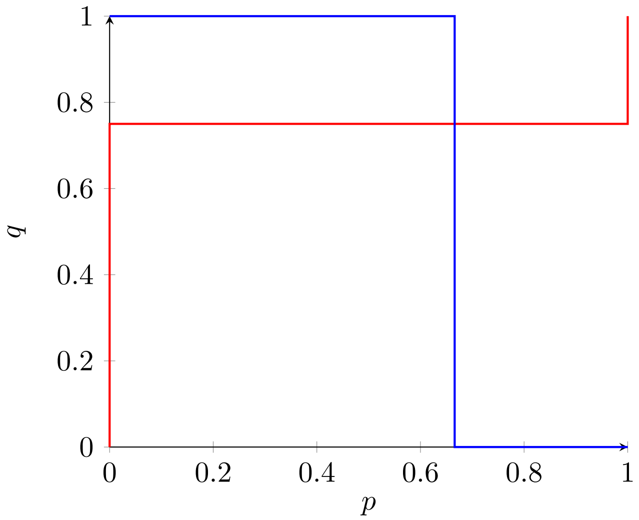
Beste reacties van speler 1

$$p = \begin{cases} 0 & \text{als } q < \frac{3}{4} \\ \text{willekeurig} & \text{als } q = \frac{3}{4} \\ 1 & \text{als } q > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Beste reacties van speler 2

$$q = \begin{cases} 1 & \text{als } p < \frac{2}{3} \\ \text{willekeurig} & \text{als } p = \frac{2}{3} \\ 0 & \text{als } p > \frac{2}{3} \end{cases}$$

De grafieken komen er dan als volgt uit te zien:



Nash-evenwichten zijn punten waarop beide spelers een beste reactie spelen op de strategie van de andere speler. In deze grafiek zijn de Nash-evenwichten precies de snijpunten van de twee lijnen. Daarvan is er nu één: het punt $(p, q) = (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$. De conclusie is dat dit spel één Nash-evenwicht heeft, namelijk de volgende strategieën voor de twee spelers:

$$\begin{aligned} &\text{speler 1: } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ &\text{speler 2: } \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.6. Een Nash-evenwicht is helaas niet altijd een optimale situatie. Het klassieke voorbeeld hiervan is het **gevangenendilemma**. In het gevangenendilemma worden twee mensen verdacht van een misdaad en worden ze los van elkaar ondervraagd. Als geen van beiden de ander verraadt, is er niet genoeg bewijs om een hoge straf te geven en krijgen beide verdachten een jaar celstraf. Als één van de verdachten wel de ander verraadt, krijgt diegene als beloning geen straf en krijgt de andere de maximale straf van tien jaar. Als beide verdachten elkaar verraden, krijgen ze allebei negen jaar celstraf. In een matrix ziet dit er als volgt uit:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Zwijgen} & \text{Verraden} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Zwijgen} \\ \text{Verraden} \end{array} & \begin{pmatrix} -1; -1 & -10; 0 \\ 0; -10 & -9; -9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Als gevangene 1 kiest voor "zwijgen", dan is het voordelig voor gevangene 2 om te kiezen voor "verraden"; zijn celstraf is 1 jaar als hij zwijgt en 0 jaar als hij de gevangene 1 verraadt. Als gevangene 1 kiest voor "verraden", dan is het voor gevangene 2 ook voordeliger om ook te kiezen voor "verraden". Hiermee krijgt hij 9 jaar celstraf, in plaats van de 10 jaar celstraf die hij krijgt als hij zwijgt.

Gevangene 2 kan dus in beide gevallen niet minder jaar celstraf krijgen als hij kiest voor "zwijgen" in plaats van "verraden". Aangezien dit argument ook geldt als we de gevangenen 1 en 2 verwisselen, is voor beide gevangenen de optie "verraden" een beste reactie op beide acties van de andere gevangene. Daarmee krijgen ze beide 9 jaar celstraf. Het (pure) Nash-evenwicht is hiermee $\begin{pmatrix}\text{verraden} & \text{verraden}\end{pmatrix}$. Dit kan trouwens ook gevonden worden uit de matrix bij het spel met de methode van Voorbeeld 3.3.

Als je in de matrix kijkt, is er wel degelijk een betere optie voor beide gevangenen. Ze zouden beiden kunnen zwijgen en slechts één jaar celstraf kunnen krijgen. Hiervoor moeten ze wel samenwerken en elkaar vertrouwen. Het kan dus voorkomen dat samenwerken een betere uitkomst oplevert dan het Nash-evenwicht spelen.

3.4 Toepassing: Havik–duif

Eén van de vele vakgebieden waarin speltheorie van pas kan komen is de evolutietheorie. Als voorbeeld hiervan gaan we kijken naar een spel dat in de natuur heel vaak gespeeld wordt. Twee dieren vinden tegelijk wat voedsel. Ze kunnen kiezen of ze al het voedsel voor zichzelf willen hebben of bereid zijn te delen. De dieren die bereid zijn te delen noemen we duiven en de dieren die alles zelf willen hebben en bereid zijn hiervoor te vechten noemen we haviken.

We kunnen dit spel interpreteren als twee dieren van dezelfde soort die allebei een actie moeten kiezen of als dieren van verschillende soorten die de actie kiezen die bij hun soort past. In de tweede interpretatie kan dit model gebruikt worden om te voorspellen hoeveel deze twee diersoorten voorkomen in verhouding tot elkaar. Het spel werkt als volgt:

- als beide spelers duiven zijn delen ze het voedsel,
- als één speler een duif is en de andere een havik krijgt de havik al het voedsel,
- als beide spelers haviken zijn vechten ze. De winnaar krijgt het voedsel en de verliezer raakt gewond bij het vechten.

Zie ook Figuur 3.1.

Als we de waarde van het voedsel V noemen en de kosten van gewond

Figuur 3.1: Uitkomsten van Havik–duif

raken K, dan ziet dit spel er in een matrix als volgt uit:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Havik} & \text{Duif} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Havik} \\ \text{Duif} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{V-K}{2}; \frac{V-K}{2} & V; 0 \\ 0; V & \frac{V}{2}; \frac{V}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

De uitkomst als beide spelers een havik zijn, is de verwachte winst van een havik in een gevecht met een andere havik. We weten als twee haviken elkaar tegenkomen namelijk nog niet wat hun winst in het spel is. Beide haviken hebben 50% kans om te winnen en 50% kans om gewond te raken. Hieruit volgt de verwachte winst van $\frac{V-K}{2}$. In de meeste situaties wordt de aanname gemaakt dat de kosten van gewond raken (K) groter zijn dan de opbrengst van het voedsel (V), oftewel $K > V$. Als dit het geval is, kunnen we met de methode van Paragraaf 3.3 de Nash-evenwichten van dit spel bepalen.

Vraag 3.7. Laat de waarde van het voedsel $V = 1$ zijn en de kosten van gewond raken $K = 5$.

(a) Wat zijn de pure Nash-evenwichten van het spel hierboven?

(b) Wat zijn de gemengde Nash-evenwichten van het spel hierboven?

In 1973 werd een iets uitgebreidere versie van dit model in een publicatie[1] gebruikt om te verklaren waarom veel dieren niet agressief vechten met hun soortgenoten.

[1] "The logic of animal conflict" van John Maynard Smith en George Robert Price in het tijdschrift Nature.

Hoofdstuk 4

Om de beurt spelen

In alle spellen die we tot nu toe hebben besproken, kiezen beide spelers tegelijk hun actie. In veel echte situaties hoeft dit niet het geval te zijn. Het zou daarom interessant zijn om ook spellen te kunnen analyseren waarin spelers om de beurt keuzes maken. We kunnen dit doen door het spel op een andere manier op te schrijven, namelijk in de **extensieve vorm**.

4.1 Spellen in de extensieve vorm

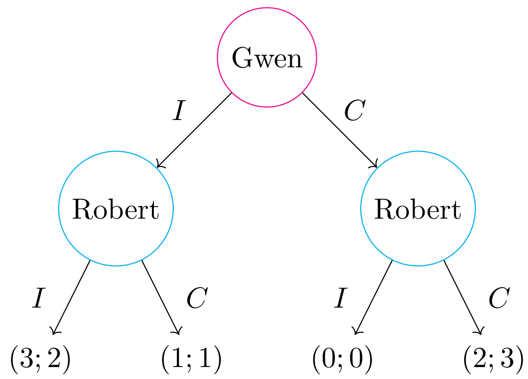
Bij een spel waarin spelers om de beurt hun actie kiezen, is de **extensieve vorm** van het spel een diagram waarin voor elke speler de mogelijke acties staan als reactie op de acties van andere spelers. Onderaan staan de uitkomsten voor elke speler.

Dit begrip is weer het helderst duidelijk te maken in voorbeelden.

Voorbeeld 4.1. Gwen en Robert gaan uit eten, maar ze hebben allebei een verschillende voorkeur voor waar ze naartoe gaan. Gwen wil het liefste naar een Italiaans restaurant (1 punt) en Robert naar een Chinees restaurant (1 punt). Ze vinden het allebei belangrijk dat ze naar hetzelfde restaurant gaan (2 punten). Als ze allebei tegelijk een keuze zouden moeten maken, zou het spel er als volgt uitzien:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Italiaans} \\ \text{Chinees} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Italiaans} & \text{Chinees} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3;\,2 & 1;\,1 \\ 0;\,0 & 2;\,3 \end{pmatrix} \end{array}.$$


In deze situatie zijn er geen dominante of gedomineerde strategieën. En er zijn twee Nash-evenwichten: $(\text{Italiaans} \quad \text{Italiaans})$ en $(\text{Chinees} \quad \text{Chinees})$. (Deze kunnen we vinden met de methode van Voorbeeld 3.3.) Er is nu niet eenduidig te bepalen wat elke speler het beste kan doen. Als we het spel nu zo veranderen dat Gwen als speler 1 als eerste kiest en Robert daarna, ziet het spel er in **extensieve vorm** als volgt uit.



Een extensieve vorm heeft een beginpunt (meestal speler 1) en takt vanaf daar af naar beneden. Je zou het kunnen zien als een omgekeerde boom; bovenin de wortel en meer naar beneden de takken.

De boom hierboven begint met Gwen die een keuze maakt tussen Italiaans (I) en Chinees (C). Hierna krijgt Robert te weten wat Gwen gekozen heeft en kan hij zelf kiezen. Onderaan staan de uitkomsten voor Gwen en Robert bij elke combinatie van keuzes die ze kunnen maken. Door een spel op deze manier weer te geven kunnen we meteen zien in welke volgorde de spelers keuzes kunnen maken en wat hun opties zijn.

Voorbeeld 4.2. Als Lomea en Marlynn afspreken, willen ze allebei een keuze maken over wat ze gaan doen. Lomea mag kiezen wat ze gaan doen en Marlynn mag vervolgens de plek hiervoor kiezen. Hiervoor willen ze de extensieve vorm van het spel tekenen, waarbij Lomea speler 1 is en begint met kiezen. Ze gebruiken hiervoor de matrix:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Slaapkamer} & \text{Keuken} & \text{Woonkamer} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Film kijken} \\ \text{Spelletjes spelen} \end{array} & \begin{pmatrix} a;b & c;d & e;f \\ g;h & i;j & k;l \end{pmatrix} \end{array}$$

.

Lomea en Marlynn hebben nog geen waardes gegeven aan de combinaties van activiteit met locatie. Hierdoor staan er nu nog de letters a tot en met l, deze staan dus voor getallen die later ingevuld moeten worden.

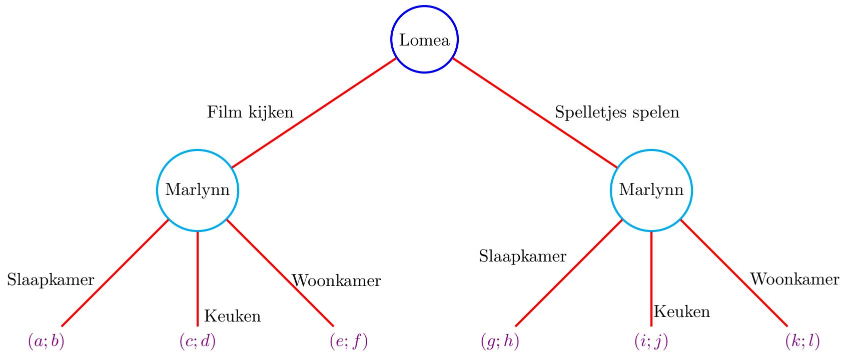
Om een extensieve vorm te tekenen, maken we gebruik van het volgende stappenplan:

1. Schrijf de naam van de speler die als eerste een keuze maakt boven aan de boom in een cirkel.

2. Maak voor elke mogelijke actie bij de vorige cirkel een lijn naar beneden. Schrijf bij deze lijn de naam van de actie.

3. Als er onder een lijn geen keuzes meer gemaakt worden, schrijf dan de winsten die bij die acties horen onder de lijn. Ga alleen naar stap 4 als er nog wel keuzes gemaakt worden.

4. Maak een cirkel onder elke lijn en schrijf in elke cirkel de naam van degene die de volgende keuze maakt. Ga daarna terug naar stap 2.



We hebben zojuist twee extensieve vormen bekeken waarbij allebei de spelers één keer een keuze mochten maken. Er zijn ook varianten mogelijk waarbij sommige spelers meerdere keuzes mogen maken. Hierbij kun je denken aan eerst speler 1, dan speler 2 en dan weer speler 1. In het voorbeeld van hierboven zou je bijvoorbeeld Lomea nog een keuze kunnen laten maken over welk dagdeel ze afspreken. In de volgende paragraaf laten we meer extensieve vormen zien waarbij spelers meer dan één keuze mogen maken. Het kan ook gebeuren dat een extensieve vorm meer dan twee spelers heeft, daarvan zullen we in de laatste paragraaf een voorbeeld zien.

Vraag 4.3. Juan en Alex willen samen een pizza bakken, maar ze houden van verschillende combinaties van ingrediënten. Ze bedenken de volgende oplossing. Eerst kiest Juan of ze een pizza met tomatensaus maken of een witte pizza. Dan kiest Alex of hij champignons of ui op de pizza doet. Tenslotte kiest Juan of hij mozzarella of gorgonzola op de pizza doet. Dan bakken ze de pizza en eten hem samen op.

Dit is hoe lekker ze alle mogelijke pizza's vinden op een schaal van 1 tot 10:

basis	champignons of ui	kaas	Juan	Alex
tomatensaus	champignons	mozzarella	9	5
tomatensaus	champignons	gorgonzola	4	7
tomatensaus	ui	mozzarella	7	6
tomatensaus	ui	gorgonzola	8	3
wit	champignons	mozzarella	10	5
wit	champignons	gorgonzola	5	7
wit	ui	mozzarella	7	3
wit	ui	gorgonzola	4	8

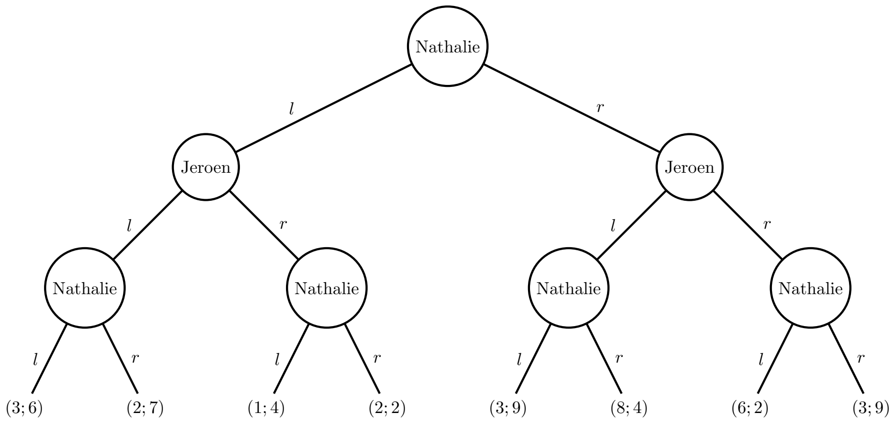
Geef de beschrijving van dit spel in de extensieve vorm.

4.2 Achterwaartse inductie

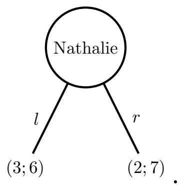
Achterwaartse inductie is een methode om de uitkomst van een spel in extensieve vorm te bepalen als elke speler op elk punt de keuze maakt die die speler uiteindelijk het meest oplevert. We kijken hierbij eerst naar de keuzes die spelers als laatste maken, en redeneren zo terug.

Bij een extensieve vorm kiezen spelers om de beurt wat ze willen. Hiermee kunnen we onderaan beginnen en bij de cirkels er net boven bekijken wat de beste actie is bij die cirkel. Als we dat weten, kunnen we voor de andere speler in de cirkels daarboven kijken welke actie daar weer het beste van is en zo kunnen we dit proces herhalen tot we in de bovenste cirkel zitten. Dit proces noemen we achterwaartse inductie.

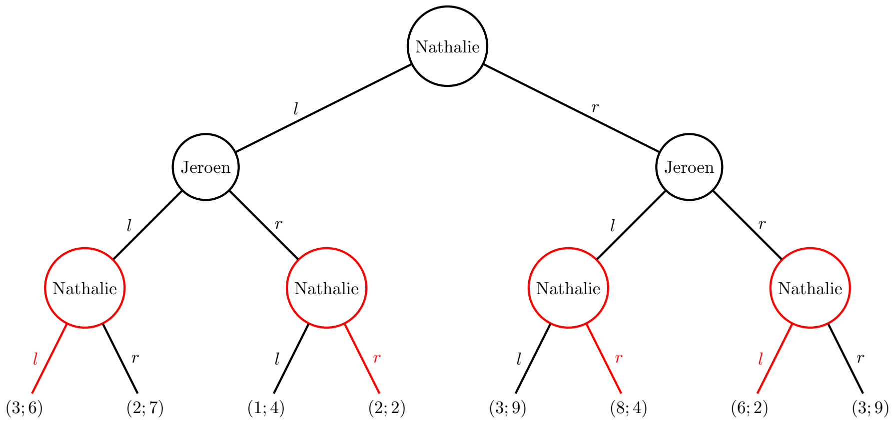
Voorbeeld 4.4. Laten we kijken naar een spel tussen Nathalie als speler 1 en Jeroen als speler 2. Beide spelers hebben steeds twee acties die we voor het gemak “links” (l) en “rechts” (r) noemen. Nathalie speelt eerst een van deze acties, dan Jeroen, en dan Nathalie weer. De winst voor beide spelers hangt af van welke combinatie van acties gespeeld wordt, zoals in deze extensieve vorm van het spel:



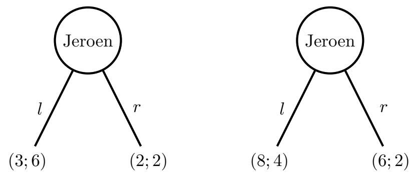
Met achterwaartse inductie beginnen we onderaan. We nemen de cirkel linksonder als voorbeeld:



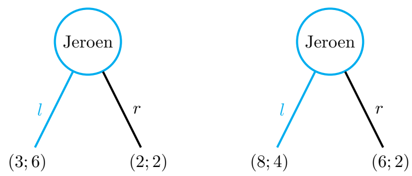
Nathalie zal hier altijd voor links kiezen, aangezien dat haar 3 oplevert in plaats van 2. Dit kunnen we voor alle onderste cirkels doen waar Nathalie een keuze kan maken. We kleuren Nathalies beste keuze rood.



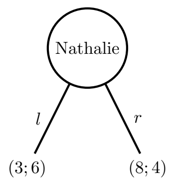
We kunnen nu voor Jeroen twee bomen maken. Hierin laten we de cirkels voor Nathalies tweede actie weg, maar schrijven we meteen de uitkomst op die we krijgen door Nathalies beste actie na elke actie van Jeroen. Dit levert deze bomen op:



De beste keuze voor Jeroen, als speler 2, is nu om bij de linkerboom voor links te gaan en bij de rechterboom ook voor links te gaan. Deze leveren meer op dan voor rechts te kiezen. Als we deze beste acties voor Jeroen blauw kleuren, dan krijgen we deze diagrammen:

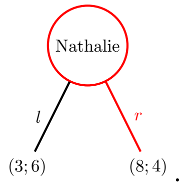


Tenslotte kijken we naar Nathalies eerste actie. We schrijven deze in een diagram, waarbij we voor elk van de twee acties de uiteindelijke uitkomst opschrijven die we krijgen nadat Jeroen de beste actie heeft gespeeld, en vervolgens Nathalie ook bij haar tweede actie. Dat levert dit diagram op:



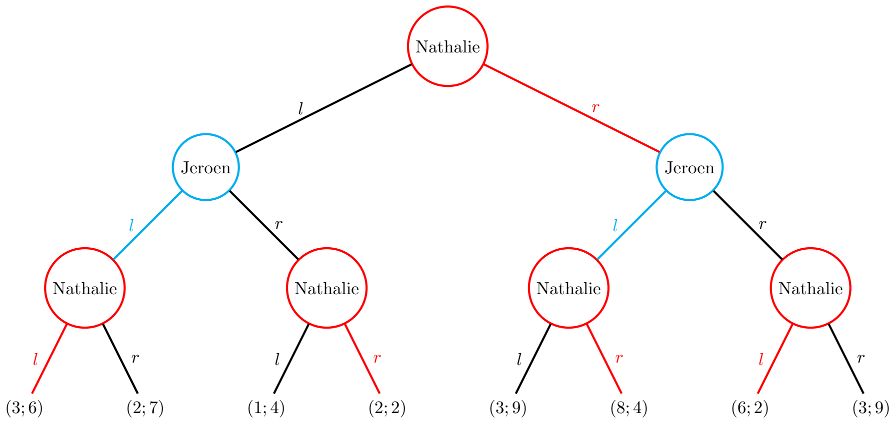
.

Als Nathalies eerste actie links is, dan weet ze dat Jeroen vervolgens ook links kiest en zij daarna ook voor links gaat. Hiermee is de uitkomst $(3; 6)$, en krijgt ze dus 3. Als ze voor rechts gaat, weet ze dat Jeroen naar links gaat en dat zij daarna voor rechts gaat. Hiermee is de uitkomst $(8; 4)$, en krijgt ze 8. Nathalies beste keuze is dus om naar rechts te gaan bij haar eerste keuze. Als we deze beste keuze rood kleuren, dan krijgen we:



De uiteindelijke winst is 8 voor Nathalie en 4 voor Jeroen.

Het diagram voor het totale spel, met elke beste actie aangegeven met kleuren, is het volgende.



De combinatie aan keuzes die spelers maken als ze achterwaartse inductie gebruiken noemen we het **achterwaartse inductie evenwicht**.

In dit geval is het achterwaartse inductie evenwicht de combinatie van keuzes waardoor we altijd over gekleurde paden van boven naar beneden gaan. Voor Nathalie zijn dit de acties rr, en voor Jeroen de actie l. De uitkomst bij dit evenwicht is een winst van 8 voor Nathalie, en een winst van 4 voor Jeroen.

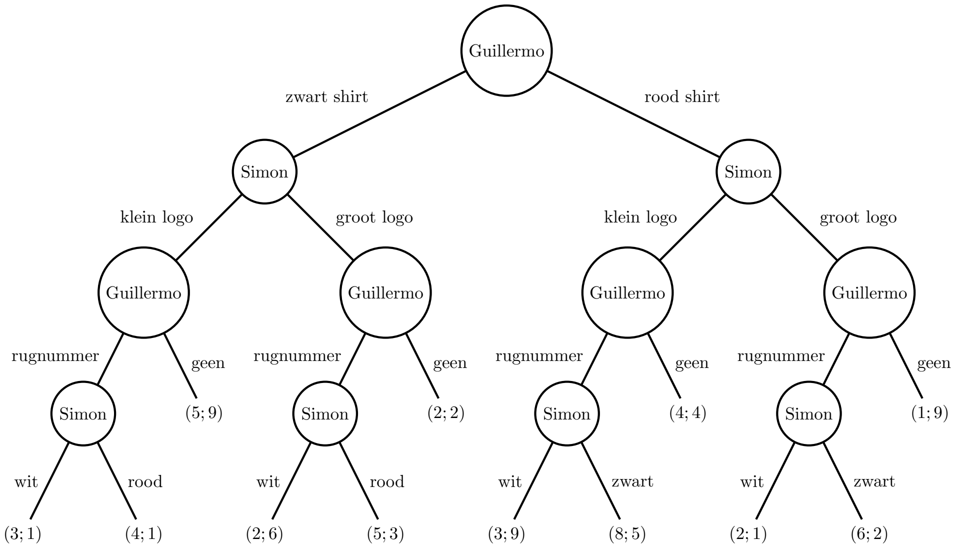
In het vorige voorbeeld is er één uniek achterwaarts inductie evenwicht, omdat bij elke keuze van de spelers één van de twee opties een grotere winst opleverde dan de andere. Als er bij sommige keuzes opties zijn die evenveel winst opleveren, dan kan het ook gebeuren dat er meer dan één achterwaarts inductie evenwicht is.

Vraag 4.5. Bepaal het achterwaartse inductie evenwicht van Voorbeeld 4.1, en de uitkomst daarbij.

Vraag 4.6. Bepaal het achterwaartse inductie evenwicht van Vraag 4.3, en de uitkomst daarbij.

Vraag 4.7. Guillermo en Simon willen samen de nieuwe wedstrijdshirts van hun volleybalteam ontwerpen. Guillermo kiest eerst of de shirts zwart of rood worden. Daarna kiest Simon of het logo van hun club klein of groot afgebeeld wordt. Guillermo kiest vervolgens of er wel of geen rugnummers op de shirts staan, en als er wel een rugnummer op komt, dan kiest Simon tenslotte of dat in het wit of in het rood wordt afgedrukt.

Hun keuzes zijn weergegeven in deze extensieve vorm, inclusief de scores voor hoe mooi Guillermo en Simon de uiteindelijke shirts vinden:



Bepaal via achterwaartse inductie wat de nieuwe wedstrijdshirts worden.

Hoofdstuk 5

Antwoorden

Antwoord bij Vraag 1.4

Het getal in rij 1 en kolom 2 is -3. Mocht je uitkomen op het getal 2, dan heb je de rij en kolom omgedraaid.

Antwoord bij Vraag 1.7

$$\begin{array}{c}
 \\ \text{Kop} \\ \text{Munt} \\ \text{Zijkant}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Kop} & \text{Munt} & \text{Zijkant} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1;-1 & -1;1 & -1;1 \\ -1;1 & 1;-1 & -1;1 \\ -1;1 & -1;1 & 1;-1 \end{pmatrix}
\end{array}.$$

Antwoord bij Vraag 1.8

De winst van Annet is $j + a - ja$ euro, en die van Jasper is $ja - j - a$ euro. Deze winsten tellen op tot nul, dus is het een nulsomspel. We kunnen ook opmerken dat er alleen geld van eigenaar verwisselt tussen Jasper en Annet, en hun totale hoeveelheid geld gelijk blijft. De totale winst is dus nul.

In de matrix bij dit spel staat de winst voor speler 1, dus Jasper. Dit levert de volgende matrix:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 2 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -2 & -4 \\
2 & -2 & 0 & 2 \\
4 & -4 & 2 & 8
\end{array}$$

Antwoord bij Vraag 1.10

Er zijn vier mogelijke uitkomsten van het spel, omdat beide spelers nooit "steen" spelen. De kans dat beide spelers papier, of beide spelers schaar spelen hoeven we niet te bekijken, omdat de uitkomst dan 0 is, dus dit niks toevoegt aan de verwachtingswaarde. De kans dat Gerbrich papier speelt en Madelon schaar, is $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Hierbij hoort voor Madelon de uitkomst 1. De kans dat Gerbrich schaar speelt en Madelon papier, is $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ en de uitkomst voor Madelon hierbij is -1. Dit geeft een verwachtingswaarde van $\frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$ voor Madelon. **Omdat het een nulsomspel is moeten de verwachtingswaardes van de spelers optellen tot 0.** Gerbrich zal daarom een verwachte winst van $-\frac{1}{3}$ hebben.

Antwoord bij Vraag 2.2

De minimale winst voor speler 1 voor elke actie is het laagste getal in de bijbehorende rij. Deze getallen zijn hier met rood aangegeven:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

De maximale van deze drie minimale winsten is het getal 1 op de derde rij. Dus de pure maximin strategie voor speler 1 is om altijd actie te spelen die bij de derde rij hoort.

Het maximale verlies voor speler 2 voor elke actie is het grootste getal in de bijbehorende kolom. Deze getallen zijn hier met rood aangegeven:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

De minimale van deze drie maximale verliezen is het getal 3 in de eerste kolom. Dus de pure minimax strategie voor speler 2 is om altijd actie te spelen die bij de eerste kolom hoort.

Antwoord bij Vraag 2.4

De maximin strategie voor speler 1 is $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bij deze strategie is de verwachte winst tegen elke actie van speler 2 gelijk aan 0. Als speler 1 één actie vaker speelt dan de andere zal de andere actie van speler 2 een negatieve verwachte winst geven, dus de minimale verwachte winst kan bij geen enkele strategie groter worden dan 0.

Antwoord bij Vraag 2.5

We kunnen beginnen door $4x + 6y + 9z = 5\frac{2}{3}$ aan beide kanten af te trekken van $7x + 6y + 3z = 5\frac{2}{3}$. Hieruit volgt $3x - 6z = 0$, dus $x = 2z$. We kunnen dit invullen in $x+y+z=1$ om $2z+y+z=1$ of $y=1-3z$ te vinden. Als we dit allebei in $4x+6y+9z=5\frac{2}{3}$ invullen krijgen we $4\cdot 2z+6\cdot(1-3z)+9z=5\frac{2}{3}$. Dit kunnen we vereenvoudigen tot $z=\frac{1}{3}$. Hieruit vinden we dan ook meteen de waardes van x en y. Zo krijgen we $x=\frac{2}{3}$, $y=0$ en $z=\frac{1}{3}$. De minimax strategie voor Wouter is dus $\begin{pmatrix}2/3 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$.

Antwoord bij Vraag 2.6

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Keeper} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Natuurlijk} & \text{Onnatuurlijk}\end{array} \\ \text{Veldspeler} & \begin{array}{c}\text{Natuurlijk} \\ \text{Onnatuurlijk}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}93 \\ 0{,}95 & 0{,}58 \end{pmatrix} \end{array}$$

Antwoord bij Vraag 2.7

(a) De grafiek van de verwachte winst van de veldspeler bevat de lijnen $0{,}70p+0{,}95\cdot(1-p)$ en $0{,}93p+0{,}58\cdot(1-p)$ waar p de kans is om de natuurlijke kant te kiezen. De ene lijn is stijgend en de andere dalend, daarom is het punt waar de laagste lijn zo hoog mogelijk is het snijpunt van deze twee lijnen. Dat punt bepalen we door de gelijkheid

$$0{,}70p+0{,}95\cdot(1-p)=0{,}93p+0{,}58\cdot(1-p)$$

op te lossen. We vinden hieruit (afgerond) $p=0{,}62$. Hieruit volgt de maximin strategie $\begin{pmatrix}0{,}62 & 0{,}38\end{pmatrix}$ voor de veldspeler.

(b) De waarde van het spel is de hoogte van het snijpunt van de twee winstlijnen uit onderdeel (a). Die hoogte vinden we door de waarde $p=0,62$ uit de gevonden maximin strategie in te vullen in een van de twee formules voor de verwachte winst:

$$\begin{aligned} &0{,}70\cdot 0{,}62+0{,}95\cdot 0{,}38=0,795; \quad \text{of} \\ &0{,}93\cdot 0{,}62+0{,}58\cdot 0{,}38=0,797. \end{aligned}$$

De verschillen komen door de afronding in onderdeel (a). In beide gevalen vinden we de afgeronde waarde 0,80 van het spel.

(c) Om de minimax strategie voor de keeper te vinden passen we het tweede punt in het gevolg van de stelling van von Neumann toe: als speler 2 een minimax strategie $\begin{pmatrix}q & 1-q\end{pmatrix}$ speelt, dan is bij elke strategie van speler 1 het verwachte verlies van speler 2 gelijk aan de waarde van het spel. Hier gebruiken we dat in de maximin strategie van speler 1 beide kansen ongelijk aan nul zijn. Als we dit uitschrijven voor de strategie $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ voor speler 1, dan krijgen we

$$0{,}70\cdot q+0{,}93\cdot(1-q)=0{,}80.$$

Dit oplossen geeft $q=13/23\approx 0{,}57$. Zo vinden we voor de keeper de minimax strategie $\begin{pmatrix}0{,}57 & 0{,}43\end{pmatrix}$.

Door de afrondingen na elk onderdeel kun je op een iets ander antwoord uitkomen als je een andere strategie voor speler 2 gebruikt bij (b) of een andere strategie voor speler 1 bij (c).

Antwoord bij Vraag 2.8

Als we aannemen dat je graag geld krijgt van je ouders, is de tweede rij strikt gedomineerd. Deze rij is gedomineerd door de derde rij, omdat je hier altijd geld krijgt. De tweede rij is niet strikt gedomineerd door de eerste rij, omdat de uitkomsten hierbij in de tweede kolom gelijk zijn.

Antwoord bij Vraag 2.11

De rode actie is een dominante actie voor Sterre. Stel Alec kiest rood, dan kiest Sterre ook altijd rood (verlies 2, terwijl geel een verlies van 4 geeft) en stel Alec kiest blauw, dan kiest Sterre weer voor rood. Hierdoor is de dominante actie van Sterre de rode actie.

Antwoord bij Vraag 2.13

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

De strategie die dan gespeeld wordt, is $\begin{pmatrix} p & 0 & q \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \end{pmatrix}$ aangezien er nog maar twee onbekende kansen waren en $p + q = 1$. We willen nu alleen nog de waarde van p weten. Aangezien we dit voor speler 2 bepalen en speler 2 altijd voor zo'n laag mogelijke winst voor speler 1 (wat het verlies is voor speler 2) gaat, willen we de kolommen 1 en 3 met zo'n kans spelen dat de totale winst kleiner is dan de winst van kolom 2. We krijgen de volgende vergelijkingen:

- $6p + 2(1-p) < 5 \xrightarrow{\text{uitrekenen}} p < \frac{3}{4}$,
- $7p + 1(1-p) < 5 \xrightarrow{\text{uitrekenen}} p < \frac{2}{3}$,
- $2p + 4(1-p) < 3 \xrightarrow{\text{uitrekenen}} p > \frac{1}{2}$.

Zolang p gekozen wordt zodat $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$, is deze strategie sterker dan het spelen van kolom 2 en is kolom 2 strikt gedomineerd door de gemengde strategie van de kolommen 1 en 3.

Antwoord bij Vraag 3.1

Stel dat speler 2 de strategie $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ speelt. Dan is zijn verwachte winst

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot z \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot z \cdot 1 = \frac{y - x}{2}.$$

De termen aan de linkerkant corresponderen respectievelijk met steen–papier, steen–schaar, papier–steen en papier–schaar. Speler 1 speelt nooit schaar, dus die opties dragen niet bij aan de verwachte winst. Ook dragen de opties waarbij beide spelers hetzelfde spelen niet bij aan de verwachte winst: de winst voor beide spelers is dan 0.

De verwachte winst $\frac{y-x}{2}$ is maximaal met x, y, z tussen 0 en 1 en $x+y+z = 1$ als $y = 1$ en $x = z = 0$. Dit geeft de strategie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dus de pure strategie waarbij speler 2 altijd papier speelt.

Antwoord bij Vraag 3.2

Als speler 1 in steen papier schaar de strategie $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ speelt, is de verwachte winst voor beide spelers altijd 0. Hiervoor maakt het niet uit welke strategie speler 2 speelt, dus is elke strategie een beste reactie.

Antwoord bij Vraag 3.4

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\underline{20}; 12 & \underline{14}; 13 & 5; \underline{19} & \underline{11}; 6 \\
8; 15 & 2; 10 & \underline{19}; \underline{18} & 6; 12 \\
7; 3 & 11; 5 & 3; \underline{20} & 9; 15 \\
18; 8 & 10; 13 & 6; \underline{20} & 9; 4
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Als bij een paar van acties beide uitkomsten onderstreept zijn, spelen beide spelers een beste reactie op de actie van de ander. In dit voorbeeld is dat alleen het geval bij de combinatie van acties (B, Y). Dit is het enige Nash-evenwicht in pure strategieën van dit spel.

Antwoord bij Vraag 3.7

Als we de gegeven waarden invullen krijgen we de bimatrix $\begin{pmatrix} -2; -2 & 1; 0 \\ 0; 1 & \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Met de methode van Voorbeeld 3.3 vinden we twee pure Nash-evenwichten: één waarin speler 1 altijd "duif" speelt en speler 2 "havik", en een ander waarbij dit precies andersom is.

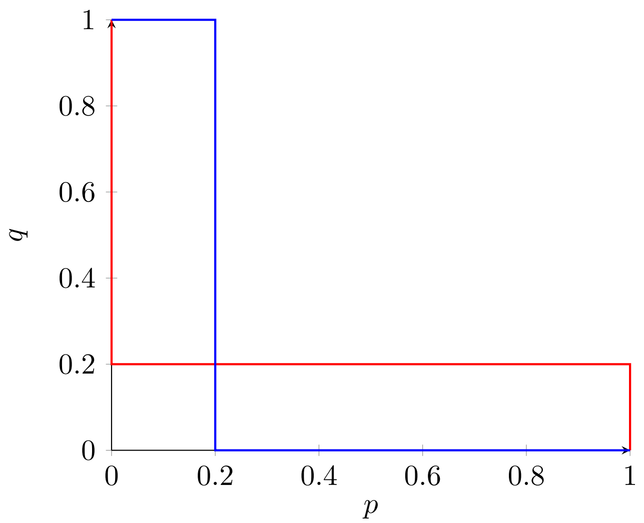
(b) Nu bepalen we het/de gemengde Nash-evenwicht(en). We noemen de kans dat speler 1 de eerste rij (Havik) speelt p en de kans dat speler 2 de eerste kolom (ook Havik) speelt q. De eerste rij is dan een beste reactie op de strategie van speler 2 als $-2q + (1-q) > 0 + \frac{1}{2} \cdot (1-q)$. Deze voorwaarde herschrijven we als

$$\begin{aligned}
-2q + (1-q) &> 0 + \frac{1}{2}\cdot(1-q)\\
1-3q &> \frac{1}{2} - \frac{q}{2}\\
1 &> \frac{1}{2} + \frac{5}{2}q\\
\frac{1}{2} &> \frac{5}{2}q\\
1 &> 5q\\
\frac{1}{5} &> q.
\end{aligned}$$

De eerste rij is dus een beste reactie als $q < \frac{1}{5}$ De tweede rij is dan een beste reactie als $q > \frac{1}{5}$ en elke strategie van speler 1 is een beste reactie als $q = \frac{1}{5}$.

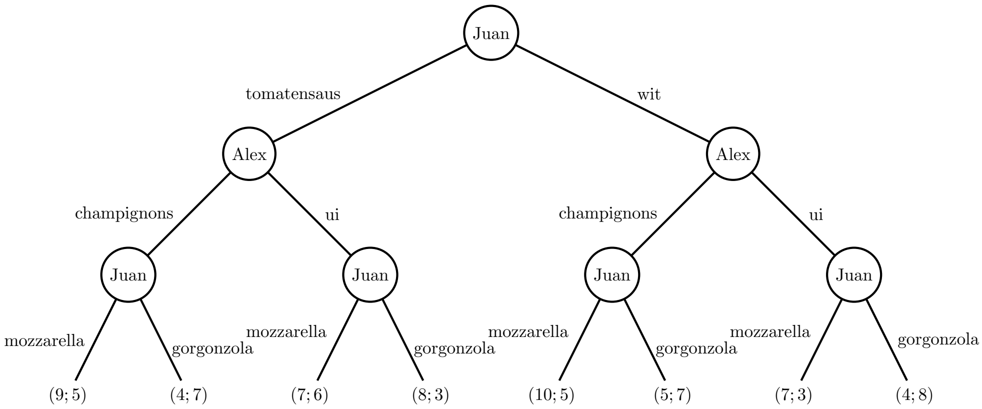
Voor speler 2 is de eerste kolom een beste reactie als $-2p + (1-p) > 0 + \frac{1}{2}\cdot(1-p)$. Zoals we konden verwachten, omdat het spel voor beide speler dezelfde winsten heeft, is dit dezelfde vergelijking als voor speler 1. We vinden dat de eerste kolom een beste reactie is als $p < \frac{1}{5}$. We vinden ook weer dat de tweede kolom een beste reactie is als $p > \frac{1}{5}$ en dat elke strategie een beste reactie is als $p = \frac{1}{5}$.

Deze beste reacties kunnen we weer samenvatten in een grafiek.



We zien dat de lijnen alleen snijpunten hebben bij $(0,1)$, $(1,0)$ en $(\frac{1}{5},\frac{1}{5})$. De eerste twee snijpunten komen overeen met de pure Nash-evenwichten die we al gevonden hadden. Het derde punt geeft een gemengd Nash-evenwicht, namelijk de situatie waarin speler 1 en 2 allebei de strategie $\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ spelen.

Antwoord bij Vraag 4.3



Antwoord bij Vraag 4.5

In de linker cirkel van Robert zal Robert kiezen voor I, dit geeft hem een winst van 2 in plaats van 1. In de rechter cirkel van Robert zal hij kiezen voor C, dit geeft hem een winst van 3 in plaats van 0. Gwen weet nu als ze voor I kiest Robert ook voor I kiest. Hiermee krijgt ze een winst van 3. Als Gwen gaat voor C, weet ze dat Robert gaat voor C. Hiermee krijgt ze een winst van 2. Het achterwaartse inductie evenwicht is Gwen: I en Robert ook I. De uitkomst hierbij is een winst van 3 voor Gwen en van 2 voor Robert.

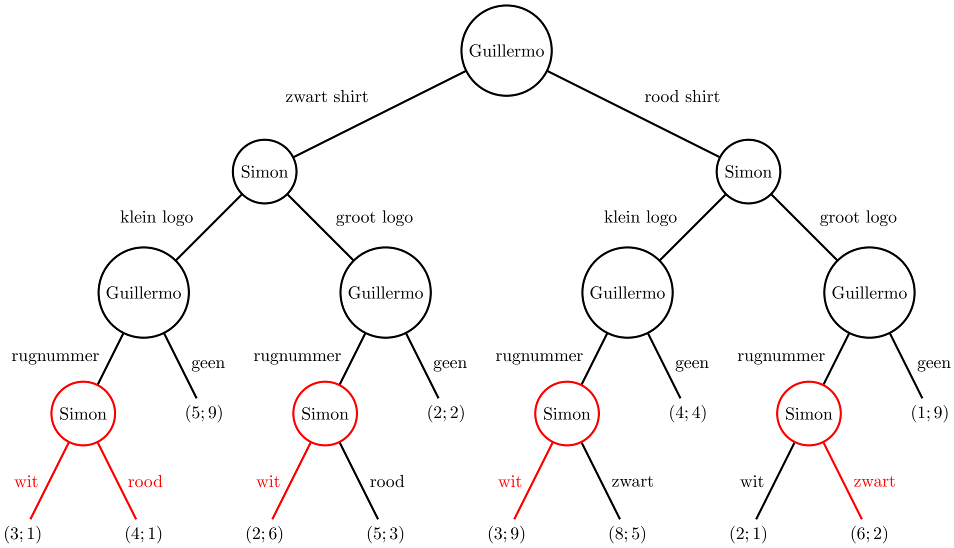
Antwoord bij Vraag 4.6

In de onderste vier cirkels waarin Juan een keuze maakt, kiest hij respectievelijk voor “mozzarella” (winst voor Juan 9 in plaats van 4), “gorgonzola”, “mozzarella” en “mozzarella”. In de twee cirkels waarin Alex een keuze maakt zien we nu dat hij kiest voor “champignons” in de linker cirkel (winst voor Alex 5 na de keuze “mozzarella” van Juan), en ook voor “champignons” in de rechter cirkel. Bij de eerste keuze van Juan levert “tomatensaus” hem een winst op van 9, na keuzes van Alex voor “champignons” en van Juan voor “mozzarella”. Een eerste keuze van “witte pizza” levert hem een winst op van 10, na keuzes van Alex voor “champignons” en van Juan voor “mozzarella”. Dus bij de eerste keuze van Juan levert “witte pizza” hem de meeste winst op.

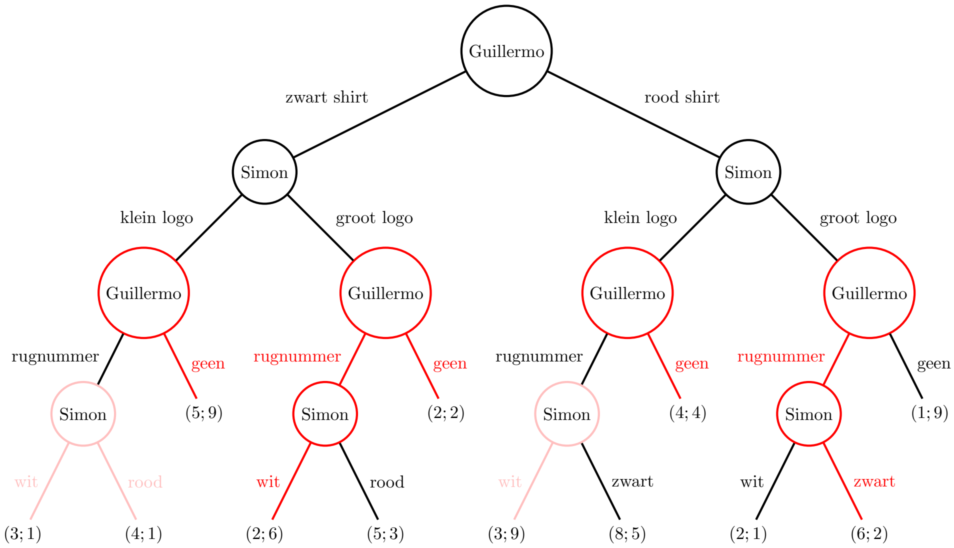
Uiteindelijk bestaat het achterwaartse inductie evenwicht uit de strategieën “witte pizza, mozzarella” voor Juan en “champignons” voor Alex. De uitkomst is een winst van 10 voor Juan en 5 voor Alex.

Antwoord bij Vraag 4.7

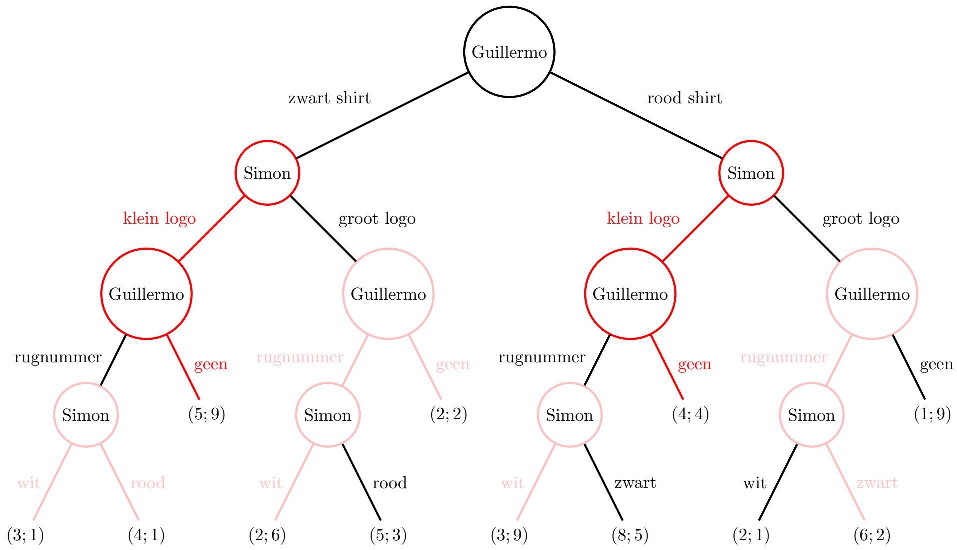
We beginnen onderaan om te kijken welke keuzes van Simon de beste zijn. We kleuren deze rood. In de cirkel linksonder krijgt Simon bij allebei de acties 1. Hierdoor is er geen voorkeur en kleuren we ze allebei.



We kijken nu vanuit de vier cirkels van Guillermo welke keuze hem de hoogste winst geeft als we weten welke Simon kiest. We kleuren deze lijnen rood. Mocht de rode lijn niet doorlopen in een eerdere rode lijn, dan wordt de oude rode lijn inactief en wordt deze roze.



Als we nu vanuit de twee cirkels van Simon kijken en weer lijnen die uitkomen op de hoogste winst voor Simon rood kleuren, krijgen we de volgende extensieve vorm.



De laatste cirkel is de beginkeuze van Guillermo. Guillermo weet dat als hij voor een zwart shirt kiest, Simon kiest voor een klein logo en hij vervolgens kiest voor geen rugnummer. Hiermee geeft hij het wedstrijdshirt een 5. Als hij voor een rood shirt kiest, kiest Simon weer voor een klein logo en hij weer voor geen rugnummer. Dit wedstrijdshirt geeft hij een 4. Guillermo's beste zet is om te kiezen voor het zwarte shirt. Het achterwaartse inductie evenwicht voor Guillermo is nu "zwart shirt, geen" en voor Simon is het "klein logo". Het wedstrijdshirt wordt zwart met een klein logo en geen rugnummer.